Préliminaire

1. Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k$$

Marche aléatoire

On considère $\Omega = \mathbb{Z}^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des suites indexées par $\mathbb{N}^*$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$.
On définit les applications coordonnées, pour tout $i \geq 1$,

$$X_i \ : \ \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots) \in \Omega \mapsto \omega_i \in \mathbb{Z}$$

On admet que l'on peut construire une tribu $\mathcal{B}$ et une mesure de probabilité P sur Ω, de sorte que les X_i soient des variables aléatoires, indépendantes et de même loi donnée par

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}$$

On définit la suite de variables aléatoires $(S_n, n \geq 0)$ par

$$S_0(\omega) = 0, \ S_n(\omega) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)$$

On définit enfin la variable aléatoire T par

$$\begin{array}{rccl} T: & \Omega & \to & \overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\} \\ & \omega & \to & \left\{ \begin{array}{ll} +\infty & \text{si } \ S_n(\omega) \neq 0, \ \forall n \geq 1 \\ \inf\{n \geq 1, \ S_n(\omega) = 0\} & \text{sinon} \end{array} \right. \end{array}$$

Pour tout entier naturel n, on note $E_n = \{T > n\}$, pour $n \geq 1$, $A_n^n = \{S_n = 0\}$ et pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$A_k^n = \{S_k = 0\} \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} \{S_i \neq 0\}$$

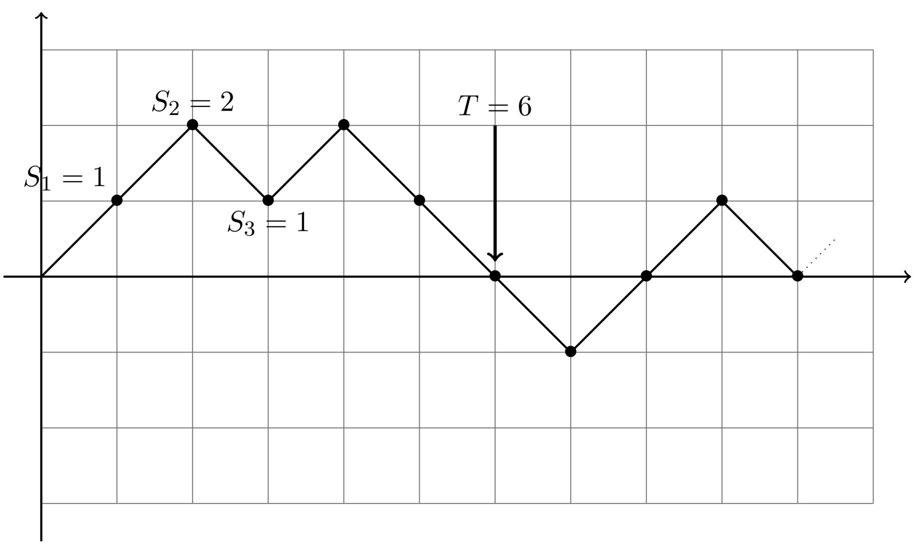

Figure 1 - Ici ω commence par $(1, 1, -1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1)$.
ω appartient à A_6^6 et A_8^8 ainsi qu'à A_0^1, A_0^2, ...,A_0^5, A_6^7 etc.

2. Montrer pour tout $1 \leq k < n$, pour tout $(i_1, \ldots, i_{n-k}) \in \{-1, 1\}^{n-k}$,

$$P(X_{k+1} = i_1, \ldots, X_n = i_{n-k}) = P(X_1 = i_1, \ldots, X_{n-k} = i_{n-k})$$

3. Montrer pour tout $1 \leq k < n$, pour tout $(j_1, \ldots, j_{n-k}) \in \mathbb{Z}^{n-k}$ que

$$P(S_{k+1} - S_k = j_1, \ldots, S_n - S_k = j_{n-k}) = P(S_1 = j_1, \ldots, S_{n-k} = j_{n-k})$$

4. En déduire rigoureusement que pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$

$$P(A_k^n) = P(S_k = 0)P(E_{n-k})$$

5. Montrer l'égalité

$$1 = \sum_{k=0}^{n} P(S_k = 0)P(E_{n-k})$$

6. Pour tout réel x de $[0, 1[$, établir l'égalité :

$$\frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} P(E_n)x^n\right)$$

7. Pour tout entier naturel n, calculer $P(S_n = 0)$.
Indication : on discutera suivant la parité de n.
8. En déduire que, pour tout $x \in [0, 1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n)x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

9. En déduire que pour tout réel $x \in [0, 1[$:

$$1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} P(T = n)x^n$$

10. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(T = 2n) = \frac{1}{2n-1} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

11. À l'aide de la formule de Stirling, déterminer un équivalent simple quand n tend vers l'infini de $P(T = 2n)$, puis de $P(E_n)$.
12. Montrer que l'on a : $P(T = +\infty) = 0$.