Problème I

1) Le polynôme P est scindé et à racines simples. Cela implique que les racines de P ne sont pas des racines de P' et donc P et P' sont premiers entre eux. En utilisant l'égalité de Bézout on obtient qu'il existe deux polynômes R et S de $\mathbb{C}[X]$ tels que

$$\boxed{RP + SP' = P \wedge P' = 1}$$

2) Soient $B, C \in \mathbb{C}[A]$.

   a) Soit $k \geqslant 1$, comme B et C commutent (ce sont des éléments de l'algèbre $\mathbb{C}[A]$ qui est commutative), la formule du binôme de Newton donne,

$$(B+C)^k = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} B^{k-i}C^i = B^k + kB^{k-1}C + \sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} B^{k-i}C^i$$

   On pose alors $\boxed{M_k = \sum_{i=2}^{k} \binom{k}{i} B^{k-i}C^{i-2}}$ qui est bien défini car $i-2 \geqslant 0$ pour $i \geqslant 2$. $\boxed{M_k \in \mathbb{C}[A]}$ car $\mathbb{C}[A]$ est une $\mathbb{C}$-algèbre, et :

$$\boxed{(B+C)^k = B^k + kB^{k-1}C + M_kC^2}$$

   b) Posons $P = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i X^i$. On a alors

$$\begin{aligned} P(B+C) &= \sum_{i=0}^{k} \alpha_i (B+C)^i \\ &= \alpha_0 I_n + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (B^i + iB^{i-1}C + M_iC^2) \\ &= \sum_{i=0}^{k} \alpha_i B^i + \left(\sum_{i=1}^{k} i\alpha_i B^{i-1} \right) C + \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i M_i \right) C^2 \end{aligned}$$

   On pose alors $\boxed{M = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i M_i}$ qui appartient bien à $\mathbb{C}[A]$ car cette dernière est une $\mathbb{C}$-algèbre. On a bien, $\boxed{P(B+C) = P(B) + P'(B)C + MC^2}$.

3) On procède par récurrence. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ on pose

$$\mathscr{P}_k : \ll \ \exists H_k \in \mathbb{C}[A], P(A_k) = (P(A))^{2^k} H_k$$

- Initialisation : pour $k = 0$, on pose $H_0 = I_n \in \mathbb{C}[A]$ et $P(A_0) = P(A) = (P(A))^1 H_0$.
- Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$, on suppose qu'il existe H_k dans $\mathbb{C}[A]$ tel que $P(A_k) = (P(A))^{2^k} H_k$. Par une récurrence immédiate, pour tout entier naturel i, $A_i \in \mathbb{C}[A]$ et donc tout polynôme en A_i est un polynôme en A.

En utilisant la question (2.b) il existe $M \in \mathbb{C}[A]$ telle que

$$P(A_{k+1}) = P(A_k - P(A_k)S(A_k)) = P(A_k) + P'(A_k) \times (-P(A_k)S(A_k)) + M(-P(A_k)S(A_k))^2$$

En utilisant que $RP + SP' = 1$, on a que $A_k - S(A_k)P'(A_k)P(A_k) = R(A_k)P^2(A_k)$ et donc

$$P(A_{k+1}) = (P(A_k))^2 R(A_k) + M(-P(A_k)S(A_k))^2 = (P(A_k))^2 (R(A_k) + M(S(A_k))^2$$

En utilisant alors l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$P(A_{k+1}) = (P(A))^{2^{k+1}} H_k^2 (R(A_k) + M(S(A_k))^2$$

Il ne reste plus qu'à poser $\boxed{H_{k+1} = H_k^2 (R(A_k) + M(S(A_k))^2}$ qui est bien un élément de $\mathbb{C}[A]$.

— Conclusion : on a bien montré que pour tout entier naturel k, $\mathscr{P}_k$ est vraie.

4) Pour tout entier i compris entre 1 et p, notons r_i la multiplicité de la valeur propre λ_i de sorte que $\chi_A = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{r_i}$. En particulier, si ℓ est tel que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ $r_i \leqslant 2^\ell$ alors $\chi_A | P^{2^\ell}$. Un tel entier ℓ existe : on peut prendre $\boxed{\ell = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} \lceil \log_2(r_i) \rceil}$. Cela implique, par le théorème de Cayley-Hamilton, que P^{2^ℓ} est un polynôme annulateur de A.
On utilisant la question précédente, on a alors

$$\boxed{P(A_\ell) = P^{2^\ell}(A) H_\ell = 0}$$

Notons que le fait que $Q \mapsto Q(A)$ soit un morphisme d'algèbre assure que $(P(A))^{2^\ell} = P^{2^\ell}(A)$.

On pose $D = A_\ell$ et $N = A - A_\ell$.

5) On a remarqué en 3) que pour tout entier naturel k, $A_k \in \mathbb{C}[A]$ et donc $\boxed{D \in \mathbb{C}[A]}$. Comme $N = A - D$ on a aussi $\boxed{N \in \mathbb{C}[A]}$.

6) Par construction, $P(D) = 0$. Or P est un polynôme scindé à racines simples donc $\boxed{D \text{ est diagonalisable}}$.

7) a) On remarque que

$$N = A - A_\ell = A_0 - A_\ell = \sum_{k=0}^{\ell-1} (A_k - A_{k+1}) = \sum_{k=0}^{\ell-1} P(A_k)S(A_k)$$

Or, pour tout entier naturel k, d'après la question 3 on peut écrire

$$P(A_k) = P(A)^{2^k} H_k = P(A) U_k$$

où $U_k = P(A)^{2^k - 1} H_k \in \mathbb{C}[A]$ est bien défini car $2^k \geqslant 1$. En faisant la somme et en posant $H = \sum_{k=0}^{\ell-1} U_k S(A_k) \in \mathbb{C}[A]$, on a bien $\boxed{N = P(A)H}$.

b) On remarque que $P(A)$ et H commutent car ce sont des éléments de $\mathbb{C}[A]$ donc

$$\boxed{N^{2^\ell} = P(A)^{2^\ell} H^{2^\ell} = 0}$$

La matrice N est bien nilpotente.

8) a) On remarque que

$$D'A = D'(D'+N') = (D')^2 + D'N' = (D')^2 + N'D' = (D'+N')D' = \boxed{AD'}$$

De même, $\boxed{N'A = AN'}$.

On sait que $D \in \mathbb{C}[A]$. Comme D' commute avec A, elle commute avec tous les polynômes en A donc $\boxed{D' \text{ commute avec } D}$: soit $Q = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ tel que $D = Q(A)$,

$$D'D = D\sum_{i=0}^{d} a_i A^i = \sum_{i=0}^{d} a_i D A^i = \sum_{i=0}^{d} a_i A^i D = D'D$$

De même, $\boxed{N' \text{ commute avec } N}$.

b) Notons r un entier tel que $N^r = (N')^r = 0$. Un tel entier existe car N et N' sont nilpotentes, on peut prendre r égal au maximum des indices de nilpotence de N et de N'. Comme $NN' = N'N$,

$$\boxed{(N'-N)^{2r-1} = \sum_{i=0}^{2r-1} \binom{2r-1}{i} N^i (N')^{2r-1-i} = 0}$$

En effet, tous les termes de la somme sont nuls car si i est compris entre r et $2r-1$, $N^i = 0$ et si $i < r$ alors $2r-1-i \geqslant r$ et donc $(N')^{2r-i} = 0$.

c) On sait que d est diagonalisable. Notons $E_{\lambda_1}(d), \ldots E_{\lambda_p}(d)$ ses espaces propres. On a donc

$$\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(d)$$

Comme $dd' = d'd$ (puisque $DD' = D'D$), $\boxed{\text{les espaces propres de } d \text{ sont stables par } d'}$. Pour tout i compris entre 1 et p, l'endomorphisme d'_i induit par d' sur $E_{\lambda_i}(d)$ est diagonalisable car d' est diagonalisable. Il existe donc une base $\mathscr{B}_i$ de $E_{\lambda_i}(d)$ telle que la matrice de d'_i dans cette base soit diagonale. En notant $\mathscr{B}$ la base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ obtenue en concatenant les bases $\mathscr{B}_i$, on a bien construit une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $\boxed{\text{Mat}_{\mathscr{B}}(d) \text{ et } \text{Mat}_{\mathscr{B}}(d') \text{ sont diagonales}}$.

d) D'après la question précédente, il existe $T \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $T^{-1}DT$ et $T^{-1}D'T$ sont toutes les deux diagonales. On a alors $T^{-1}(D'-D)T$ qui est aussi diagonale en tant que différence de deux matrices diagonales. Cela montre que $\boxed{D'-D \text{ est diagonalisable}}$.

e) On a supposé que $A = D + N = D' + N'$ ce qui implique $D - D' = N' - N$. Cette matrice est donc diagonalisable et nilpotente. Elle est semblable à une matrice diagonale mais comme sa seule valeur propre est 0 puisqu'elle est nilpotente, elle est semblable à la matrice nulle. Cela implique donc que $D - D' = N' - N = 0$ et donc $\boxed{D = D' \text{ et } N = N'}$.

9) Dans les notations de la question 4),

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{r_i}$$

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, λ_i a pour multiplicité $r_i - 1$ dans χ'_A (et donc n'est pas racine de χ'_A si $r_i = 1$).

$$pgcd(\chi_A, \chi_A') = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{\min(r_i, r_i-1)} \prod_{i=1}^{q}(X-\mu_i)^{\min(0,s_i)} = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{r_i-1}$$

où $\mu_1, \ldots, \mu_q$ sont les racines de χ_A' qui ne sont pas racines de χ_A et $s_1, \ldots, s_q$ sont leur multiplicité dans χ_A'.

Ainsi $\boxed{P = \dfrac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi_A'}}$, ce qui permet de calculer P à l'aide du calcul de χ_A, de l'algorithme d'Euclide et d'une division polynomiale.

Problème II

Partie I

1) a) La fonction $t \mapsto e^{ct} f(t)$ est continue donc d'après le théorème fondamental de l'analyse, $\theta : x \mapsto \displaystyle\int_0^x e^{ct} f(t)dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$. Cela montre donc que $\boxed{\varphi(f) \text{ est de classe } \mathscr{C}^1}$ comme produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. De plus $\theta(0) = 0$ donc $\boxed{\varphi(f)(0) = 0}$.

b) En utilisant encore le théorème fondamental de l'analyse, la dérivée de θ est $\theta' : x \mapsto e^{cx} f(x)$. On en déduit que pour tout $x \in I$,

$$(\varphi(f))'(x) + c\varphi(f)(x) = -ce^{-cx}\theta(x) + e^{-cx}e^{cx}f(x) + ce^{-cx}\theta(x) = f(x)$$

Cela montre bien que $\varphi(f)$ vérifie l'équation différentielle

$$\boxed{y' + cy = f}$$

2) La $\boxed{\text{linéarité de } \varphi}$ découle de la linéarité de l'intégrale.

De plus, pour $f \in \mathscr{C}^0(I)$, $\boxed{\varphi(f) \in \mathscr{C}^1(I) \subset \mathscr{C}^0(I)}$.

Partie II

3) a) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall f \in \mathscr{C}^0(I), \|f\|_1 = \int_0^b 1.|f(t)|dt \leqslant \sqrt{\int_0^b 1^2 dt}\sqrt{\int_0^b |f|^2(t)dt} = \sqrt{b}\,\|f\|_2\,.$$

Donc $\boxed{M_{1,2} = \sqrt{b}}$ convient

La valeur $\sqrt{b}$ est la plus petite valeur convenant car pour f constante égale à 1, $||f||_1 = b$ et $||f||_2 = \sqrt{b}$ d'où $||f||_1 = \sqrt{b}||f||_2$.

b) Par l'inégalité de la moyenne $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_0^b f^2} \leqslant \sqrt{\sup|f^2| \displaystyle\int_0^b |1|} = \sqrt{b}\,\|f\|_\infty$ car pour x dans $[0, b]$, $|f^2(x)| \leqslant (\sup|f|)^2$ donc $\sup|f^2| \leqslant (\sup|f|)^2 = \|f\|_\infty^2$.

Ainsi $\boxed{M_{2,\infty} = \sqrt{b}}$ convient.

De plus, c'est la plus petite valeur convenant car pour f constante non nulle, $\frac{\|f\|_2}{\|f\|_\infty} = \sqrt{b}$.

4) Soit $x \in I$.

$$|\varphi(f)(x)| \leqslant e^{-cx}\int_{[0,x]} e^{ct}|f(t)|\,dt \leqslant e^{-cx}\left(\int_0^x e^{ct}\,dt\right)\|f\|_\infty = \frac{1}{c}\left(1 - e^{-cx}\right)\|f\|_\infty \leqslant \frac{1-e^{-cb}}{c}\|f\|_\infty\,.$$

Donc $\|\varphi(f)\|_\infty \leqslant k_\infty\,\|f\|_\infty$ avec $\boxed{k_\infty = \frac{1-e^{-cb}}{c}}$.

Là encore, cette valeur est optimale car $\frac{\|\varphi(f)\|_\infty}{\|f\|_\infty} = \frac{1-e^{-cb}}{c}$ lorsque f est constante non nulle.

5) Par l'inégalité de la moyenne :

pour tout $x \in [0, b]$,

$$|\varphi(f)(x)| \leqslant |e^{-cx}| \sup_{t\in[0,x]} |e^{ct}| \int_{[0,x]} |f(t)|\,dt = e^{-cx}e^{cx}\int_0^x |f| \leqslant \int_0^b |f| = \|f\|_1$$

Ainsi $\boxed{k_{\infty,1} = 1}$ convient [1].

Partie III

6) On utilise la définition : $\varphi(f_\lambda)(x) = e^{-cx}\displaystyle\int_0^x e^{(c-\lambda)t}dt$.

$$\boxed{\text{Si } \lambda \neq c,\ \varphi(f_\lambda)(x) = \frac{e^{-\lambda x} - e^{-cx}}{c-\lambda}\ ;\ \text{sinon, } \varphi(f_\lambda)(x) = x\, e^{-cx}}.$$

7) a) Dans tous les cas, les fonctions f_λ et $\varphi(f_\lambda)$ sont continues sur $I = [0, +\infty[$ et négligeables au voisinage de $+\infty$ devant $\dfrac{1}{x^2}$, donc $\boxed{\text{intégrables sur } I}$.

b) On obtient facilement $\boxed{\|f_\lambda\|_1 = \dfrac{1}{\lambda}}$ et (en remarquant que dans dans tous les cas $\varphi(f_\lambda)$ est à valeurs positives et sans oublier de traiter à part le cas où $\lambda = c$) $\boxed{\|\varphi(f_\lambda)\|_1 = \dfrac{1}{c\lambda}}$.

8) a) Pour tout $x \in [0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
|\varphi(f)(x)| &= e^{-cx}\left|\int_0^x e^{ct}f(t)dt\right| \quad \text{car } e^{-cx} \geqslant 0\\
&\leqslant e^{-cx}\int_0^x |e^{ct}f(t)|dt\\
&= e^{-cx}\int_0^x e^{ct}|f(t)|dt = \varphi(|f|)(x)
\end{aligned}$$

b) D'après 1.b, $ch = |f| - h'$. Pour tout $X \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned}
\int_0^X h(x)dx &= \int_0^X \frac{|f(x)| - h'(x)}{c}dx\\
&= \frac{\int_0^X |f(x)|dx - [h]_0^X}{c} \quad \text{car } h \text{ est de classe } \mathscr{C}^1\\
&= \frac{\int_0^X |f(x)|dx - h(X)}{c} \quad \text{car } h(0) = \varphi(|f|)(0) = 0\\
&\leqslant \frac{1}{c}\int_0^X |f(x)|dx \quad \text{car } h \text{ est à valeurs positives d'après 8.a}
\end{aligned}$$

c) Comme $|f|$ est positive, on a pour tout $X \geqslant 0$, $\displaystyle\int_0^X h(x)dx \leqslant \frac{1}{c}\int_0^X |f(x)|dx \leqslant \frac{1}{c}\int_0^{+\infty} |f(x)|dx$.
Comme de plus h est positive, elle est intégrable sur $[0, +\infty[$ et

$$\boxed{||h||_1 = \sup_{X\geqslant 0}\int_0^X |h| = \sup_{X\geqslant 0}\int_0^X h \leqslant \frac{1}{c}||f||_1}$$

1. Là encore, cette valeur est optimale, mais cela est moins immédiat ; le quotient $\frac{\|\varphi(f)\|_\infty}{\|f\|_1}$ n'atteint pas la valeur 1 mais s'en approche arbitrairement près, pour réaliser cela, il suffit de « concentrer la masse » $\|f\|_1$ de f près de b : en considérant par exemple pour $0 \leqslant a < b$ la fonction $f_a : x \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } x < a \\ x - a \text{ sinon}\end{cases}$ on a :

$$\varphi(f_a)(b) = e^{cb}\int_a^b e^{-ct}(t-a)dt \geqslant e^{cb}e^{-ca}\int_a^b (t-a)dt = e^{c(b-a)}\,\|f_a\|_1 \text{ et ainsi } \frac{\varphi(f_a)(b)}{\|f_a\|_1} \to 1 \text{ quand } a \to b^-.$$

d) Par 8.a, on en déduit que $\boxed{\varphi(f) \text{ est intégrable et que } \|\varphi(f)\|_1 \leqslant \frac{1}{c}\|f\|_1}$.

9) La restriction de φ à $L^1(I)$, encore notée φ, est linéaire et par la question précédente, elle est à valeurs dans $L^1(I)$.

L'inégalité $\|\varphi(f)\|_1 \leqslant \dfrac{1}{c}\,\|f\|_1$, valable pour tout $f \in L^1(I)$, assure que l'endomorphisme φ sur $L^1(I)$ est lipschitzien. De plus, $|||\varphi|||_1 \leqslant \dfrac{1}{c}$.

Comme $\dfrac{\|\varphi(f_\lambda)\|_1}{\|f_\lambda\|_1} = \dfrac{1}{c}$, on a $\boxed{|||\varphi|||_1 = \dfrac{1}{c}}$.

10) a) i) On sait que $f_\lambda^2 = f_{2\lambda}$ est intégrable d'après 7.a) donc f_λ est dans $L^2(I)$.

Si $\lambda \neq c$, $(\varphi(f_\lambda))^2 = \frac{f_{2\lambda}+f_{2c}-2f_{\lambda+c}}{(c-\lambda)^2}$ est $\boxed{\text{intégrable}}$ comme combinaison linéaire de fonctions intégrables.

Si $\lambda = c$, $\varphi(f_\lambda)^2 : x \mapsto x^2e^{-2cx}$ est $\boxed{\text{intégrable}}$ sur $\mathbb{R}_+$ car continue et négligeable devant $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ en $+\infty$.

ii) D'abord

$$\boxed{\|f_\lambda\|_2 = \sqrt{\|f_{2\lambda}\|_1} = \sqrt{\frac{1}{2\lambda}}}$$

Ensuite, si $\lambda \neq c$,

$$\begin{aligned}
\|\varphi(f_\lambda)\|_2 &= \sqrt{\int_0^{+\infty} \frac{f_{2\lambda}+f_{2c}-2f_{\lambda+c}}{(c-\lambda)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{2c}-\frac{2}{\lambda+c}}{(c-\lambda)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{c(\lambda+c)+\lambda(\lambda+c)-4\lambda c}{2c\lambda(\lambda+c)(c-\lambda)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2\lambda c(\lambda+c)}}
\end{aligned}$$

Enfin, dans le cas $\lambda = c$, pour tout $X \geqslant 0$, intégrant trois fois par parties,

$$\int_0^X (\varphi(f_c))^2 = \int_0^X x^2e^{-2cx}dx = \Big[\frac{e^{-2cx}}{-2c}x^2 - \frac{e^{-2cx}}{4c^2}2x + \frac{e^{-2cx}}{-8c^3}2\Big]_0^X - \int_0^X 0$$

et passant à la limite quand X tend vers $+\infty$,

$$\|\varphi(f_c)\|_2 = \sqrt{\frac{1}{4c^3}} = \sqrt{\frac{1}{2cc(c+c)}}$$

Dans tous les cas, $\boxed{\|\varphi(f_\lambda)\|_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2\lambda c(\lambda+c)}}}$.

b) En multipliant l'égalité $f = g' + cg$ par g et en intégrant entre 0 et X, on obtient

$$\boxed{\forall X > 0,\ \frac{g^2(X)}{2} + c\int_0^X g^2(t)\ dt = \int_0^X f(t)g(t)\ dt.}$$

car $g(0) = 0$.

c) On en déduit que : $c\int_0^X g^2(t)\,dt \leqslant \int_0^X f(t)g(t)\,dt \leqslant \sqrt{\int_0^X f(t)^2\,dt}\sqrt{\int_0^X g(t)^2\,dt}$.

Donc si $\sqrt{\int_0^X g(t)^2\,dt} > 0$ alors $c\sqrt{\int_0^X g^2(t)\,dt} \leqslant \sqrt{\int_0^X f(t)^2\,dt}$, et l'inégalité demeure vraie dans le cas restant.

Finalement, si f est dans $L^2(I)$, on a $\forall X > 0$, $\sqrt{\int_0^X g^2(t)\,dt} \leqslant \frac{1}{c}\|f\|_2$. Comme g^2 est continue et positive, cette majoration assure $\boxed{\text{l'intégrabilité de } g^2}$, donc l'appartenance de g à $L^2(I)$: φ induit un endomorphisme de $L^2(I)$.

On obtient de plus par passage aux limites quand $X \to +\infty$ dans les inégalités larges la majoration $\boxed{\|g\|_2 = \|\varphi(f)\|_2 \leqslant \frac{1}{c}\|f\|_2}$, qui traduit que la restriction de φ à $L^2(I)$ est lipschitzienne. On a également $|||\varphi|||_2 \leqslant \frac{1}{c}$.

Comme $\boxed{\frac{\|\varphi(f_\lambda)\|_2}{\|f_\lambda\|_2} = \frac{1}{\sqrt{c(c+\lambda)}} \xrightarrow[\lambda\to 0^+]{} \frac{1}{c}}$, on a finalement $\boxed{|||\varphi|||_2 = \frac{1}{c}}$.

Partie III

11) a) Soit f, g dans H. Les fonctions f^2 et g^2 sont intégrables sur I. D'après l'inégalité arithmético-géométrique, $|fg| \leqslant \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$.

On en déduit par comparaison pour les fonctions positives que $\boxed{fg \text{ est intégrable sur } I}$

De même, $\boxed{f'g' \text{ est intégrable sur } I}$ car f' et g' sont de carré intégrable sur I.

b) Vérifions les axiomes des produits scalaires

- ϕ est bien définie par la question précédente.
- ϕ est clairement symétrique : si $f, g \in H$:
$\phi(f,g) = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt + \int_0^{+\infty} f'(t)g'(t)\,dt = \int_0^{+\infty} g(t)f(t)\,dt + \int_0^{+\infty} g'(t)f'(t)\,dt = \phi(g,f)$
- Ainsi, on peut seulement vérifier la linéarité à droite de ϕ : si $f, g, h \in H$, $a, b \in \mathbb{R}$:
$\phi(f, ag+bh) = \int_0^{+\infty} f(t)(ag(t)+bh(t))\,dt + \int_0^{+\infty} f'(t)(ag'(t)+bh'(t))\,dt$ (linéarité de la dérivation)
$= a\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,dt + b\int_0^{+\infty} f(t)h(t)\,dt + a\int_0^{+\infty} f'(t)g'(t)\,dt + b\int_0^{+\infty} f'(t)h'(t)\,dt$ (par linéarité de l'intégrale)
$= a\phi(f,g) + b\phi(f,h)$
- Soit $f \in H$: $\phi(f,f) = \int_0^{+\infty} f(t)^2\,dt + \int_0^{+\infty} f'(t)^2\,dt \geqslant 0$ car f^2 et f'^2 sont intégrables et positives (car f et f' sont à valeurs réelles).
- Soit $f \in H$ telle que $\phi(f,f) = \int_0^{+\infty} f(t)^2\,dt + \int_0^{+\infty} f'(t)^2\,dt = 0$; comme les deux termes sont positifs, on a $\int_0^{+\infty} f(t)^2\,dt = \int_0^{+\infty} f'(t)^2\,dt = 0$.

Or f^2 est **continue**, positive, intégrable et d'intégrale nulle sur I, ainsi $f^2 \equiv 0$ d'où $f \equiv 0$ sur I.

$\boxed{\phi \text{ est donc bien un produit scalaire sur } H}$, et $\|\ \|_H$ est la norme euclidienne associée.

12) En 10.c), on a montré que φ est un endomorphisme lipschitzien de $L^2(I)$, et plus précisément :

$$\forall f \in L^2(I), \|\varphi(f)\|_2 \leqslant \frac{1}{c}\|f\|_2$$

a) Soit f dans $L^2(I)$. On sait que $g = \varphi(f)$ est aussi dans $L^2(I)$. Or $L^2(I)$ est un espace vectoriel, donc $g' = \varphi(f)' = f - c\varphi(f) = f - c\, g$ est dans $L^2(I)$. Donc $g = \varphi(f)$ est dans H, et vaut 0 en 0, donc $\boxed{\text{est dans } K}$.

b) De plus : $\|\varphi(f)'\|_2 = \|f - c\varphi(f)\|_2 \leqslant \|f\|_2 + |c|\,\|\varphi(f)\|_2 \leqslant \|f\|_2 + c\,\frac{1}{c}\|f\|_2 = 2\|f\|_2$ par le rappel ci-dessus ;
donc $\|\varphi(f)\|_H^2 = \|\varphi(f)\|_2^2 + \|\varphi(f)'\|_2^2 \leqslant \frac{1}{c^2}\|f\|_2^2 + 4\|f\|_2^2$.
Finalement, avec $\boxed{A = \sqrt{4 + \frac{1}{c^2}}}$, qui est indépendant de f, $\|\varphi(f)\|_H \leqslant A\|f\|_2$.

c) • Tout d'abord, φ est une application linéaire de $L^2(I)$ dans K.
• Si $\varphi(f) \equiv 0$, alors $f = \varphi(f)' + c\varphi(f) = 0$. Donc $\boxed{\varphi \text{ est injectif}}$ (c'est valable sur $\mathscr{C}^0(I)$).
Les espaces étant de dimension infinie, il faut aussi établir la surjectivité :
• Soit g dans K. On pose $f = g' + cg$. Alors f est continue (car g est de classe $\mathscr{C}^1$) et appartient à $L^2(I)$ (par combinaison linéaire d'éléments de $L^2(I)$). De plus, comme $g(0) = 0$, $g = \varphi(f)$ car vérifie la même équation différentielle résoluble en y' et à coefficient et second membre continus que $\varphi(f)$. On peut aussi faire une vérification directe :

$$\forall x \in I \quad \varphi(f)(x) = e^{-cx}\int_0^x e^{ct}(g'(t) + cg(t))dt = e^{-cx}[e^{ct}g(t)]_0^x = g(x)$$

car $g(0) = 0$.
Donc $\boxed{\psi \text{ est surjective de } L^2(I) \text{ dans } K}$.
Finalement, ψ est un isomorphisme de $L^2(I)$ dans K.

d) L'inégalité de la question 12.b) assure que l'application linéaire ψ de $(L^2(I), \|.\|_2)$ dans $(K, \|.\|_H)$ est lipschitzienne.

e) Soit g dans K. D'après la question 12.c), $\psi(g) = \varphi^{-1}(g) = g' + cg$.
Donc $\boxed{\|\psi^{-1}(g)\|_2 \leqslant \|g'\|_2 + |c|\,\|g\|_2 \leqslant \|g\|_H + c\,\|g\|_H = (1+c)\,\|g\|_H}$.
Cette inégalité assure que l'application linéaire ψ^{-1} de $(K, \|.\|_H)$ dans $(L^2(I), \|.\|_2)$ est lipschitzienne.