Nom :

DS 4

Soin) ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5

---

1) $\exists R, S \quad RP + SP' = 1$ par Bézout et car $P \wedge P' = 1$ ☐0 ☐1

car P et P' n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$ ☐0 ☐1

2)a) $\exists M_k \in \mathbb{C}[A] \quad (B+C)^k = B^k + kB^{k-1}C + M_k C^2$ ☐0 ☐1

car B et C commutent ☐0 ☐1

$M_k \in \mathbb{C}[A]$ car $\mathbb{C}[A]$ est une algèbre ☐0 ☐1

2)b) $\exists M \in \mathbb{C}[A] \quad P(B+C) = P(B) + P'(B)C + MC^2$ ☐0 ☐1

3) $\exists H_k \in \mathbb{C}[A] \quad P(A_k) = (P(A))^{2^k} H_k$: initialisation ☐0 ☐1

$P(A_{k+1}) = P(A_k) - (P'PS)(A_k) + M(PS)^2(A_k)$ ☐0 ☐1

car les A_k sont dans $\mathbb{C}[A]$ par récurrence ☐0 ☐1

donc les polynômes en A_k aussi ☐0 ☐1

$P(A_{k+1}) = P(A_k) - (P'PS)(A_k) + M(PS)^2(A_k)$ ☐0 ☐1

$P(A_{k+1}) = (P^2R)(A_k) + M(PS)^2(A_k)$ ☐0 ☐1

d'où l'hérédité ☐0 ☐1

4) $\exists \ell \quad P(A_\ell) = 0$ ☐0 ☐1 ☐2

5) $D = A_\ell$ et $N = A - A_\ell \in \mathbb{C}[A]$ ☐0 ☐1

6) D est diagonalisable ☐0 ☐1

7)a) $N = \sum_{k=0}^{\ell-1}(PS)(A_k)$ ☐0 ☐1

rappeler 3) : $P(A_k) = P^{2^k}(A)$ ☐0 ☐1

donc $\exists H \in \mathbb{C}[A] \quad N = P(A)H$ ☐0 ☐1

7)b) N est nilpotente ☐0 ☐1

car $P(A)$ l'est ☐0 ☐1

car $P(A)$ et H commutent ☐0 ☐1

8)a) D' et N' commutent avec A ☐0 ☐1

D' commute avec D et N' commute avec N ☐0 ☐1

8)b) $N' - N$ est nilpotente par formule du binôme ☐0 ☐1

et car N' commute avec N ☐0 ☐1

8)c) d et d' sont codiagonalisables ☐0 ☐1

8)d) $D - D'$ est diagonalisable ☐0 ☐1

8)e) $D' = D$ et $N' = N$ ☐0 ☐1 ☐2

9) $P = \frac{\chi_A}{\chi_A \wedge \chi'_A}$ ☐0 ☐1 ☐2

---

1)a) $\varphi(f)$ de classe $\mathcal{C}^1$ TFA ☐0 ☐1

$\varphi(f)(0) = 0$ ☐0 ☐1

1)b) $\varphi(f)$ vérifie $y' + cy = f$; calcul ☐0 ☐1

TFA ☐0 ☐1

2) $f \mapsto \varphi(f)$ linéaire ☐0 ☐1

$f \mapsto \varphi(f)$ endo ☐0 ☐1

---

3)a) $\exists M_{1,2}, ||f||_{1,[0,b]} \leqslant M_{1,2}||f||_{2,[0,b]}$ $M_{1,2} = \sqrt{b}$ par Cauchy-Schwarz ☐0 ☐1

valeur optimale f constante non nulle ☐0 ☐1

3)b) $\exists M_{2,\infty}, ||f||_{2,[0,b]} \leqslant M_{2,\infty}||f||_{\infty,[0,b]}$ $M_{2,\infty} = \sqrt{b}$ ☐0 ☐1

valeur optimale f constante non nulle ☐0 ☐1

4) $\exists k_\infty, ||\varphi(f)||_\infty \leqslant k_\infty ||f||_\infty$ $k_\infty = \frac{1-e^{-cb}}{c}$ ☐0 ☐1

valeur optimale f constante non nulle ☐0 ☐1

5) $\exists k_\infty, ||\varphi(f)||_\infty \leqslant k_\infty ||f||_\infty$ $k_\infty = \frac{1-e^{-cb}}{c}$ ☐0 ☐1

valeur optimale f constante non nulle ☐0 ☐1

5) $\exists k_{\infty,1}, ||\varphi(f)||_\infty \leqslant k_\infty ||f||_1$ $k_{\infty,1} = 1$ ☐0 ☐1

---

6) $\varphi(f_\lambda)(x) = \frac{e^{-\lambda x} - e^{-cx}}{c - \lambda}$ si $\lambda \neq c$ ☐0 ☐1

$\varphi(f_\lambda)(x) = xe^{-cx}$ si $\lambda = c$ ☐0 ☐1

7)a) f_λ intégrable continue sur $[0, +\infty[$ ☐0 ☐1

f_λ intégrable car $f_\lambda(x) = o(1/x^2)$ ☐0 ☐1

$\varphi(f_\lambda)$ intégrable car $\varphi(f_\lambda)(x) = o(1/x^2)$ si $\lambda \neq c$ ☐0 ☐1

$\varphi(f_\lambda)$ intégrable car $\varphi(f_\lambda)(x) = o(1/x^2)$ si $\lambda = c$ ☐0 ☐1

7)b) $||f_\lambda||_1 = \frac{1}{\lambda}$ ☐0 ☐1

$||\varphi(f_\lambda)||_1 = \frac{1}{\lambda c}$ si $\lambda \neq c$ .... ☐0 ☐1

$||\varphi(f_\lambda)||_1 = \frac{1}{\lambda c} = \frac{1}{\lambda^2}$ si $\lambda = c$ .... ☐0 ☐1

redaction IPP .... ☐0 ☐1

8)a) $|\varphi(f)(x)| \leqslant \varphi(|f|)(x)$ .... ☐0 ☐1

8)b) $\forall X \in [0;+\infty[\int_0^X h(x)dx \leqslant \frac{1}{c}\int_0^X |f(x)|dx$ pour $h = \varphi(f)$ ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

8)c) h intégrable car h positive .... ☐0 ☐1

$||h||_1 \leqslant \frac{1}{c}||f||_1$ .... ☐0 ☐1

10)a)i) f_λ^2 intégrable continue sur $[0,+\infty[$ .... ☐0 ☐1

f_λ^2 intégrable car $(f_\lambda)^2 = f_{2\lambda}$ .... ☐0 ☐1

$\varphi(f_\lambda)^2$ intégrable car $\varphi(f_\lambda)^2 = \frac{f_{2\lambda}-2f_{\lambda+c}+f_{2c}}{(c-\lambda)^2}$ si $\lambda \neq c$ .... ☐0 ☐1

$\varphi(f_\lambda)^2$ intégrable car $\varphi(f_\lambda)(x) = o(1/x^2)$ si $\lambda = c$ .... ☐0 ☐1

10)a)ii) $||f_\lambda||_2 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ .... ☐0 ☐1

$||\varphi(f_\lambda)||_2 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda c(\lambda+c)}}$ si $\lambda \neq c$ .... ☐0 ☐1

$||\varphi(f_\lambda)||_2 = \frac{1}{\sqrt{2\lambda^2(\lambda+\lambda)}} = \frac{1}{\sqrt{4\lambda^3}}$ si $\lambda = c$ .... ☐0 ☐1 ☐2

10)b) $\forall X \geqslant 0, \dfrac{g^2(X)}{2} + c\int_0^X g^2(t)dt = \int_0^X f(t)g(t)dt$ .... ☐0 ☐1 ☐2

car $g^2(0) = 0$ .... ☐0 ☐1

10)c) $c\int_0^X g^2 \leqslant \int_0^X fg$ car $g^2 \geqslant 0$ .... ☐0 ☐1

$c\int_0^X g^2 \leqslant \sqrt{\int_0^X f^2}\sqrt{\int_0^X g^2}$ par Cauchy-Schwarz .... ☐0 ☐1

$c\sqrt{\int_0^X g^2} \leqslant \sqrt{\int_0^X f^2}$ .... ☐0 ☐1

meme si $\sqrt{\int_0^X g^2} = 0$ .... ☐0 ☐1

$g = \varphi(f) \in L^2(I)$ .... ☐0 ☐1

et $||\varphi(f)||_2 \leqslant \frac{1}{c}||f||_2$ .... ☐0 ☐1

donc $|||\varphi|||_2 \leqslant \frac{1}{c}$ .... ☐0 ☐1

$\frac{||\varphi(f_\lambda)||_2}{||f_\lambda||_2} = \frac{1}{\sqrt{c(\lambda+c)}}$ .... ☐0 ☐1

$|||\varphi|||_2 = \frac{1}{c}$ en faisant $\lambda \to 0^+$ .... ☐0 ☐1

---

11)a) si f^2 et g^2 sont intégrable alors fg aussi .... ☐0 ☐1

De même pour f' et g' .... ☐0 ☐1

11)b) $(f,g) \mapsto \int_0^\infty fg + \int_0^\infty f'g'$ produit scalaire axiomes .... ☐0 ☐1

continuité pour le caractère défini .... ☐0 ☐1

12)a) $f \in L^2 \Rightarrow \varphi(f) \in L^2$ car $\varphi(f) \in L^2$ d'après le rappel .... ☐0 ☐1

et $(\varphi(f))' = f - c\varphi(f) \in L^2$ .... ☐0 ☐1

et $(\varphi(f))(0) = 0$ .... ☐0 ☐1

12)b) $\exists A > 0, \forall f \in L^2(I), ||\varphi(f)||_H \leqslant A||f||_2$ $A = \sqrt{A + \frac{1}{c^2}}$ par ex

.... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

12)c) φ injectif de H sur K car $f = (\varphi(f))' + c\varphi(f)$ .... ☐0 ☐1

φ est surjectif 012 .... ☐0 ☐1

12)d) $\psi = \varphi_{|L^2}$ est lipschitzien d'après 12.b .... ☐0 ☐1

12)e) ψ^{-1} est lipschitzien car $||\psi^{-1}(g)||_2 \leqslant (1+c)||g||_H$ .... ☐0 ☐1

.... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

.... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4

.... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4