1. On pose $E = \left\{ f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \ , \ \int_0^{+\infty} f^2 \text{ converge} \right\}$

   Montrer que si $(f,g) \in E^2$ alors $f+g$ aussi

Corrigé

Commençons en montrant que si $(f,g) \in E^2$ alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} fg$ converge.

En effet, si $(f,g) \in E^2$ alors fg est une fonction continue. De plus, pour tout $x \in \mathbf{R}_+$,

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{f^2(x) + g^2(x)}{2}$$

d'après l'inégalité artihmético-géométrique. De ce fait, par comparaison pour les fonctions positives, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |fg|$ converge et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} fg$ converge.

On peut conclure par linéarité en voyant que $(f+g)^2 = f^2 + 2fg + g^2$.

2. Soit $\mathscr{B}(\mathbf{N})$ l'ensemble des suites réelles bornées. On pose pour u dans $\mathscr{B}(\mathbf{N})$: $N(u) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{|u_n|}{2^n}$.

   (a) Justifier que N est bien définie et que c'est une norme.

Corrigé

Soit $u \in \mathscr{B}(\mathbf{N})$. Elle est bornée. On en déduit que pour tout entier n, $0 \leqslant \frac{|u_n|}{2^n} \leqslant \frac{||u||_\infty}{2^n}$. Or la série $\left(\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{1}{2^n} \right)$ converge donc, la série de terme général $\frac{|u_n|}{2^n}$ est convergente par comparaison pour les séries à termes positifs.

Vérifions alors que N est une norme.

i) Elle est valeurs positives.

ii) Soit u telle que $N(u) = 0$. On a alors que pour tout entier n, $\frac{|u_n|}{2^n} = 0$ et donc $u_n = 0$. Finalement, $u = 0$.

iii) Soit $u \in \mathscr{B}(\mathbf{N})$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, $N(\lambda.u) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{|\lambda.u_n|}{2^n} = |\lambda|.\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{|u_n|}{2^n} = |\lambda| N(u)$.

iv) Soit $(u,v) \in \mathscr{B}(\mathbf{N})^2$. On a

$$N(u+v) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n + v_n|}{2^n} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|v_n|}{2^n} = N(u) + N(v)$$

On a bien vérifié que N était une norme

(b) Montrer que pour tout $u \in \mathscr{B}(\mathbf{N})$, $N(u) \leqslant 2||u||_\infty$.

Corrigé

On a : $N(u) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n} \leqslant ||u||_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2||u||_\infty$.

(c) Les normes N et $||.||_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Corrigé

Elles ne sont pas équivalentes car on ne peut pas trouver de constante K telle que pour tout suite u de $\mathscr{B}(\mathbf{N})$, $||u||_\infty \leqslant KN(u)$. En effet, si on pose $u(N)$ la suite définie par

$$u(N) : n \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } n = N \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a alors $||u(N)||_\infty = 1$ et $N(u(N)) = \frac{1}{2^N}$ et donc $\dfrac{||u(N)||_\infty}{N(u(N))} = 2^N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$.