

## Espaces vectoriels normés - 2

---

<b>1</b>	<b>Topologie d'un espace vectoriel normé</b>	<b>257</b>
1.1	Ouverts . . . . .	257
1.2	Voisinages . . . . .	258
1.3	Fermés . . . . .	259
1.4	Points intérieurs et intérieur . . . . .	260
1.5	Points adhérents et adhérence . . . . .	262
1.6	Caractérisation séquentielle des points adhérents et des fermés . . . . .	263
1.7	Frontière . . . . .	264
1.8	Densité . . . . .	264
1.9	Invariance par changement de normes équivalentes . . . . .	265
1.10	Topologie induite . . . . .	266
<b>2</b>	<b>Étude locale d'une application</b>	<b>268</b>
2.1	Limite en un point adhérent . . . . .	268
2.2	Composition . . . . .	270
2.3	Opérations sur les limites . . . . .	271
2.4	Continuité . . . . .	271
2.5	Caractérisation du caractère continu par les images réciproques . . . . .	274
2.6	Applications uniformément continues . . . . .	275
2.7	Applications lipschitziennes . . . . .	275
2.8	Applications linéaires continues . . . . .	277
<b>3</b>	<b>Parties compactes d'un espace vectoriel normé</b>	<b>278</b>
3.1	Définition . . . . .	278
3.2	Applications continues sur une partie compacte . . . . .	280
<b>4</b>	<b>Espaces vectoriels de dimension finie</b>	<b>281</b>
4.1	Equivalence des normes . . . . .	282
4.2	Topologie des espaces vectoriels de dimension finie . . . . .	283
4.3	Applications continues . . . . .	283
<b>5</b>	<b>Séries à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie</b>	<b>285</b>
5.1	Généralités . . . . .	285
5.2	Série géométrique de matrices . . . . .	285
5.3	Série exponentielle de matrices . . . . .	287
<b>6</b>	<b>Parties connexes par arcs</b>	<b>289</b>
6.1	Motivation . . . . .	289
6.2	Définition . . . . .	289
6.3	Image d'une partie connexe par arcs par une application continue . . . . .	291

---

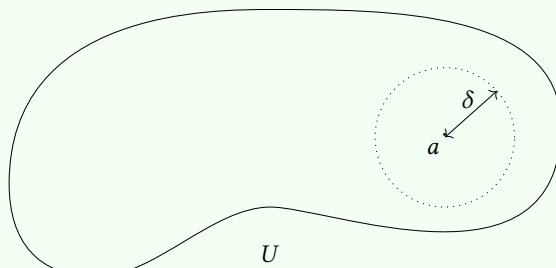
Nous allons continuer à étudier les espaces vectoriels normés. Dans ce chapitre  $\mathbf{K}$  désigne  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . Sans précisions autre,  $E$  désignera un espace vectoriel normé dont la norme sera notée  $\|\cdot\|$ .

# 1 Topologie d'un espace vectoriel normé

## 1.1 Ouverts

### Définition 12.1 (Ouverts)

Soit  $U$  une partie de  $E$ . On dit que c'est un ouvert de  $E$  si pour tout  $a$  dans  $U$  il existe  $\delta > 0$  tel que la boule ouverte  $B(a, \delta)$  soit inclus dans  $U$ .



### Remarques :

1. La valeur de  $\delta$  peut dépendre de  $a$ .
2. Cela signifie que si  $U$  est un ouvert, tout point « à coté » d'un point de  $U$  est encore dans  $U$ .

**Terminologie :** On peut dire que  $X$  est un ouvert ou que  $X$  est ouvert (sous-entendu un ensemble ouvert) voire ouverte (une partie ouverte).

### Exemples :

1. Dans  $\mathbf{R}$ , un intervalle ouvert est ouvert. Par exemple  $U = ]0, 1[$ . En effet soit  $a \in U$ , on pose  $\delta = \frac{\min(|a - 1|, |a|)}{2}$  et  $B(a, \delta) = ]a - \delta, a + \delta[ \subset ]0, 1[ = U$ .
2. Dans  $\mathbf{R}$ , l'ensemble  $[0, 1]$  n'est pas un ouvert. En effet, pour  $a = 0$  et pour  $\delta > 0$ , la boule  $B(a, \delta)$  n'est pas inclus dans  $]0, 1[$ .
3. Les parties  $\emptyset$  et  $E$  sont des ouverts. Ce sont les ouverts *triviaux*.
4. Soit  $E = \mathbf{K}_n[X]$  et si pour  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ ,  $\|P\|_\infty = \max_k |a_k|$  alors  $F = \{P \in E \mid P(1) > 0\}$  est un ouvert. En effet, soit  $P \in F$ . On a donc

$$P(1) = \sum_{k=0}^n a_k > 0.$$

Maintenant soit  $Q \in B(P, \delta)$  où  $\delta < \frac{P(1)}{2(n+1)}$ , on peut écrire  $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k$  où  $|a_k - b_k| \leq \delta$ . De ce fait,

$$|Q(1) - P(1)| \leq \sum_{k=0}^n |a_k - b_k| \leq (n+1)\delta \leq \frac{P(1)}{2}.$$

Donc  $Q(1) \geq P(1) - |Q(1) - P(1)| \geq \frac{P(1)}{2} > 0$ .

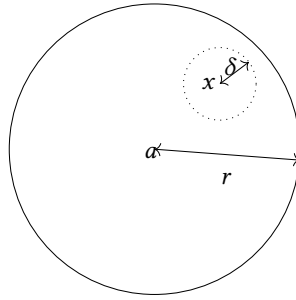
**Exercice :** Montrer que dans  $E = \mathbf{K}[X]$  pour la norme infinie,  $F = \{P \in E \mid P(1) > 0\}$  n'est pas un ouvert.

### Proposition 12.2

Une boule ouverte  $B(a, r)$  de  $E$  est un ouvert de  $E$ .

**Démonstration :** Soit  $x \in B(a, r)$ . On a donc  $d(x, a) < r$ . Soit  $\varepsilon$  tel que  $d(x, a) + \varepsilon < r$ . On a que  $B(x, \varepsilon) \subset B(a, r)$ . En effet pour  $y \in B(x, \varepsilon)$ ,

$$\|y - a\| \leq \|(y - x) + (x - a)\| \leq d(x, y) + d(x, a) \leq d(x, a) + \varepsilon < r.$$



□

### Proposition 12.3

Notons  $\mathcal{T}$  l'ensemble des ouverts de  $E$ .

1. Les ensembles  $\emptyset$  et  $E$  appartiennent à  $\mathcal{T}$
2. L'ensemble  $\mathcal{T}$  est stable par intersection **finie**. C'est-à-dire qu'une intersection finie d'ouverts est encore un ouvert.
3. L'ensemble  $\mathcal{T}$  est stable par union quelconque. C'est-à-dire qu'une union d'ouverts est encore un ouvert.

#### Remarques :

1. Un moyen mnémotechnique pour retenir que c'est une intersection finie est (IFO).
2. L'ensemble des ouverts n'est pas stable par intersection quelconque. Par exemple si on pose  $I_n = ]0, 1 + \frac{1}{n}[$  qui est un ouvert de  $\mathbf{R}$ . Alors  $I = \bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} I_n = ]0, 1]$  qui n'est plus ouvert.
3. (Hors programme) L'ensemble  $\mathcal{T}$  des ouverts de  $E$  est ce que l'on appelle la topologie de  $E$ .

#### Démonstration :

1. Déjà dit.
2. Soit  $U_1, \dots, U_n$  des ouverts et  $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ . On sait que comme tous les  $U_i$  sont des ouverts, pour chaque  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  il existe  $r_i$  tel que  $B(x, r_i) \subset U_i$ . Il ne reste plus qu'à poser  $r = \min_{1 \leq i \leq n} r_i$  pour constater que  $B(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^n U_i$  et donc  $\bigcap_{i=1}^n U_i$  est ouvert.
3. Soit  $(U_i)_{i \in I}$  une famille d'ouverts. On considère  $U = \bigcup_{i=1}^n U_i$ . Soit  $x \in U$ . Il existe  $i \in I$  tel que  $x \in U_i$ . Comme, pour ce  $i$ ,  $U_i$  est ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset U_i \subset U$ . On a bien que  $U$  est ouvert.

□

## 1.2 Voisinages

### Définition 12.4

Soit  $a \in E$ . Un voisinage de  $a$  dans  $E$  est une partie  $X$  de  $E$  telle qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $B(a, \delta) \subset X$ .

#### Remarques :

1. On peut aussi dire que  $X$  contient un ouvert contenant  $a$ .
2. Dans le cas où  $E = \mathbf{R}$  on étend la notion de voisinage pour définir les voisinages de  $+\infty$  et de  $-\infty$ . Un voisinage de  $+\infty$  contient un intervalle de la forme  $[M, +\infty[$  quand un voisinage de  $-\infty$  contient un intervalle de la forme  $]-\infty, m]$ .

**ATTENTION**

Ne pas confondre les notions de voisinages et d'ouvert. Quand on parle d'un voisinage on parle toujours d'un voisinage d'un point. De fait, un ouvert est une partie de  $E$  qui est un voisinage de tous ses points.

**Exemples :**

1. Dans  $\mathbf{R}$ ,  $[0, 1]$  est un voisinage de  $\frac{1}{2}$ .
2. Dans  $E = \mathbf{R}_n[X]$  avec  $\|\sum_{i=0}^n a_i X^i\| = \text{Max}\{|a_i| \mid i \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$  l'ensemble  $F = \{P \in E \mid P(1) > 0\}$  est un voisinage de  $Q = X + 1$ . On a  $Q(1) = 2$ , ce de fait en posant  $\delta = \frac{1}{n+1}$ , pour tout  $P \in B(Q, \delta)$ ,  $P \in F$ . Il suffit d'écrire  $P = Q + H$  où  $H \in B(0, \delta)$  donc  $|H(1)| \leq (n+1)\|H\| \leq 1$ . On conclut en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$P(1) \geq Q(1) - |H(1)| \geq 2 - 1 = 1 > 0$$

**Exercice :** Reprendre l'exemple précédent dans  $\mathbf{R}[X]$ .

**Proposition 12.5**

Soit  $a \in E$ .

1. Soit  $V_1, \dots, V_n$  une famille finie de voisinages de  $a$  dans  $E$ , l'intersection  $\bigcap_{i=1}^n V_i$  est encore un voisinage de  $a$ .
2. Soit  $(V_i)_{i \in I}$  une famille de voisinages de  $a$  dans  $E$ . L'union  $\bigcup_{i \in I} V_i$  est encore un voisinage de  $a$ .

**Démonstration :** Il suffit de reprendre la démonstration de la proposition analogue dans le cas des ouverts.

**Définition 12.6 (Propriété locale)**

Soit  $P$  une propriété. On dit qu'elle est vraie au voisinage d'un point  $a$  de  $E$ , s'il existe un voisinage de  $a$  où elle est vérifiée.

**Remarque :** Il est équivalent de dire qu'il existe une boule ouverte contenant  $a$  (ou même centrée en  $a$ ) où la propriété est vraie.

**Exemple :** La fonction  $(x, y) \mapsto x^2 \cos(y)$  est bornée au voisinage de  $a = (2, 1)$ .

**1.3 Fermés****Définition 12.7**

Une partie  $X$  de  $E$  est un fermé si son complémentaire est ouvert.

**Terminologie :** On peut dire que  $X$  est un fermé ou que  $X$  est fermé (sous-entendu un ensemble fermé) voire fermée (une partie fermée).

**Exemples :**

1. Dans  $E = \mathbf{R}$ , un intervalle fermé  $X = [a, b]$  est fermé. En effet son complémentaire  $\complement_E X = ]-\infty, a[ \cup ]b, +\infty[$  est ouvert.
2. Les parties  $\emptyset$  et  $E$  sont fermées.

**ATTENTION**

La notion d'ouverts et de fermés ne sont pas contraire l'une de l'autre. Une partie peut-être ouverte et fermée (par exemple  $E$  en entier) comme elle peut être ni ouverte ni fermé (par exemple  $]0, 1[$ ).

**Proposition 12.8** (Propriétés des fermés)

1. Soit  $X$  une partie de  $E$ ,  $X$  est un ouvert si et seulement si  $\mathbb{C}_E X$  est un fermé.
2. Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  une famille finie de fermés. L'union  $\bigcup_{i=1}^n X_i$  est un fermé.
3. Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille de fermés. L'intersection  $\bigcap_{i \in I} X_i$  est un fermé.

**Démonstration :**

1. Soit  $X \subset E$ ,

$$\mathbb{C}_E X \text{ fermé} \iff \mathbb{C}_E(\mathbb{C}_E X) \text{ ouvert} \iff X \text{ ouvert}$$

2. Par définition, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\mathbb{C}_E X_i$  sont des ouverts. On a alors

$$\mathbb{C}_E \left( \bigcup_{1 \leq i \leq n} X_i \right) = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \mathbb{C}_E X_i$$

Donc  $\mathbb{C}_E \left( \bigcup_{1 \leq i \leq n} X_i \right)$  est un ouvert, d'où  $\bigcup_{1 \leq i \leq n} X_i$  est un fermé.

3. Cela se démontre en passant au complémentaire comme ci-dessus. □

**Proposition 12.9**

Les boules fermées et les sphères sont fermées.

**Démonstration :**

- Commençons par le cas des boules fermées. Soit  $B$  la boule (fermée) de centre  $a$  et de rayon  $r \geq 0$ , son complémentaire  $\mathbb{C}_E B = \{x \in E \mid d(x, a) > r\}$  est un ouvert. En effet soit  $x \in \mathbb{C}_E B$ ,  $d(x, a) > r$ . Si on pose  $\delta$  tel que  $d(x, a) - \delta > r$  (on peut prendre par exemple  $\delta = \frac{d(x, a) - r}{2}$ ) alors  $B(x, \delta) \subset \mathbb{C}_E B$ . En effet, pour tout  $y \in B(x, \delta)$ ,

$$\|y - a\| = \|(y - x) + (x - a)\| \geq \|x - a\| - \|y - x\| \geq d(x, a) - \delta > r.$$

On a bien montré que  $\mathbb{C}_E B$  était un ouvert et donc  $B$  est un fermé.

- Traitons le cas de la sphère fermée  $S = S(a, r) = \{x \in E \mid d(x, a) = r\}$ . Il suffit de remarquer que  $S = \overline{B(a, r)} \cap \mathbb{C}_E B(a, r)$ . C'est donc l'intersection de deux fermés. □

**Remarque :** En particulier les singletons qui sont les sphères de rayon 0 sont des fermés.

**Exemples :**

1. Toute partie finie de  $E$  est un fermé car c'est une réunion finie de singleton qui sont des fermés.
2. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$  est un fermé mais  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = ]0, 1]$  n'est pas fermé.

**1.4 Points intérieurs et intérieur****Définition 12.10** (Points intérieurs)

Soit  $X$  une partie de  $E$ .

1. Un point  $a$  de  $X$  est dit intérieur à  $X$  s'il existe  $\delta > 0$  tel que  $B(a, \delta) \subset X$ .
2. L'ensemble des points intérieurs de  $X$  s'appelle l'intérieur de  $X$ . Il se note  $\overset{\circ}{X}$ .

1. On peut aussi le faire à la main. On montre que  $\mathbb{C}_E S$  est un ouvert. Soit  $x \in \mathbb{C}_E S$ . On a donc  $d(a, x) \neq r$ .

– Si on est dans le cas où  $d(a, x) > r$  l'argument ci-dessus est encore valable.

– Si on est dans le cas où  $d(a, x) < r$  on a un argument analogue.

On a donc que  $\mathbb{C}_E S$  est un ouvert et donc  $S$  est un fermé.

**Remarques :**

1. Un point  $a$  de  $X$  est donc un point intérieur à  $X$  si  $X$  est un voisinage de  $a$ .
2. Par définition  $\overset{\circ}{X} \subset X$ . On a égalité si et seulement si tous les points  $a$  de  $X$  sont intérieurs à  $X$  ce qui signifie que  $X$  est ouvert.

**Exemples :**

1. Soit  $X = ]0, 1[$ . Les points  $a$  appartenant à  $]0, 1[$  sont des points intérieurs à  $X$ . Par contre  $a = 1$  n'est pas un point intérieur. On a donc  $\overset{\circ}{X} = ]0, 1[$ .
2. Soit  $B$  la boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$ . Ses points intérieurs sont ceux qui sont dans la boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r$ . C'est-à-dire  $\overset{\circ}{B}(a, r) = B(a, r)$ . En effet,
  - si  $x \in B(a, r)$ , comme  $B(a, r)$  est un ouvert, il existe  $\delta$  tel que

$$B(x, \delta) \subset B(a, r) \subset B.$$

- si  $x \notin B(a, r)$  on a donc  $d(a, x) = r$ . Maintenant pour tout  $\delta > 0$ , on pose

$$y = x + \delta \frac{x - a}{2\|x - a\|}$$

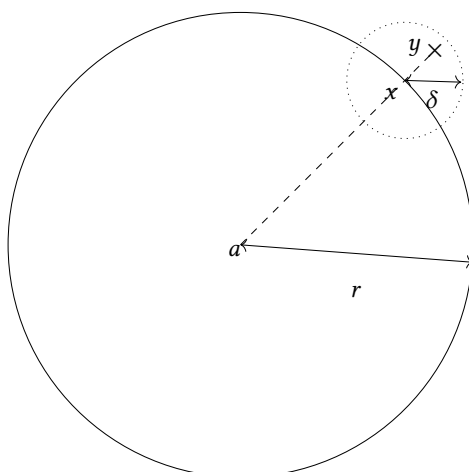
On a donc

$$\|y - x\| = \frac{\delta}{2}$$

donc  $y \in B(x, \delta)$  mais

$$y - a = y - x + x - a = \left(1 + \frac{\delta}{2\|x - a\|}\right) \|x - a\| > \|x - a\| = r.$$

Donc  $y \notin B$ . On en déduit que  $x$  n'est pas intérieur.



**Proposition 12.11**

Soit  $X$  une partie de  $E$ .

1. Son intérieur  $\overset{\circ}{X}$  est ouvert et c'est le plus grand ouvert contenu dans  $X$ .
2. On a donc :  $X$  ouvert  $\Leftrightarrow \overset{\circ}{X} = X$ .

**Démonstration :** Il est clair que  $\overset{\circ}{X}$  est inclus dans  $X$ . Il reste à montrer que  $\overset{\circ}{X}$  est un ouvert et que tout ouvert inclus dans  $X$  est inclus dans  $\overset{\circ}{X}$ .

- Soit  $U \subset X$  un ouvert inclus dans  $X$ , alors  $U \subset \overset{\circ}{X}$ . En effet soit  $x \in U$ , comme  $U$  est ouvert il existe une boule  $B(x, \delta)$  centrée en  $x$  qui est inclus dans  $U$  et donc dans  $X$ . De ce fait,  $x$  est un point intérieur à  $X$ . On a bien  $U \subset \overset{\circ}{X}$ .
- Montrons que  $\overset{\circ}{X}$  est un ouvert. Soit  $x \in \overset{\circ}{X}$ . C'est donc un point intérieur à  $X$ . Par définition, il existe  $\delta > 0$  tel que  $B(x, \delta) \subset X$ . Maintenant, pour tout  $y \in B(x, \delta/2)$ , il existe une boule ouverte  $B(y, \varepsilon)$  (où  $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$ ) inclus dans  $B(x, \delta)$  (car cette dernière est ouverte). Donc  $B(y, \varepsilon) \subset B(x, \delta) \subset X$ . On en déduit que  $y$  est un point intérieur à  $X$  c'est-à-dire que  $\overset{\circ}{X}$  est un ouvert.

On a bien montré que  $\overset{\circ}{X}$  est le plus grand ouvert contenant  $X$ . □

**Exercices :**

1. Déterminer  $\overset{\circ}{Q}$ .
2. Déterminer l'intérieur d'un sous-espace vectoriel strict.

## 1.5 Points adhérents et adhérence

### Définition 12.12

Soit  $X$  une partie de  $E$ .

1. Un point  $a$  de  $E$  est un point adhérent à  $X$  si pour tout  $\delta > 0$  la boule ouverte centrée en  $a$  de rayon  $\delta$  rencontre  $X$  ( $X \cap B(a, \delta) \neq \emptyset$ ).
2. L'ensemble des points adhérents à  $X$  s'appelle l'adhérence de  $X$ . Il se note  $\overline{X}$ .

**Remarque :** Tout point  $a$  de  $X$  est adhérent à  $X$  car  $a \in X \cap B(a, \delta)$ . On en déduit que  $X \subset \overline{X}$ .

**Exemples :**

1. Si  $X = ]0, 1[$ , tous les éléments de  $X$  sont adhérents à  $X$ . De plus 0 est adhérent à  $X$ . L'ensemble des points adhérents est donc  $[0, 1]$ .

2. Soit  $X = B(a, r)$ .

– Tous les points de  $B(a, r)$  sont adhérents à  $X$ .

– Soit  $x$  tel que  $d(a, x) > r$ . Le point  $x$  n'est pas adhérent à  $X$ . En effet, on considère  $\delta > 0$  tel que  $d(a, x) > \delta + r$ . Pour  $y \in B(x, \delta)$ ,

$$d(a, y) \geq d(a, x) - d(x, y) > d(a, x) - r > \delta$$

Cela montre que  $B(x, \delta) \cap B(a, r) = \emptyset$  et donc que  $x \notin \overline{X}$ .

– Les points de la sphère  $S(a, r)$  sont adhérents à  $X$ . Soit  $x$  tel que  $\|x - a\| = r$  et  $\delta > 0$ , il existe un élément  $y$  appartenant à  $B(a, r) \cap B(x, \delta)$ . Quand  $\delta < r$ , (le cas  $\delta \geq r$  est évident) il suffit de prendre

$$y = x + \delta \frac{a - x}{2\|a - x\|}.$$

Il est clair que  $y \in B(x, \delta)$  par construction, de plus  $\|y - a\| = \left(1 - \frac{\delta}{2\|x - a\|}\right) \|x - a\| < r$ .

On a montré que  $\overline{B(a, r)} = \overline{B(a, r)}$ .

### Proposition 12.13

Soit  $X$  une partie de  $E$ ,

$$\mathring{C}_E \dot{X} = \overline{C_E X} \quad \text{et} \quad \mathring{C}_E \dot{X} = C_E \overline{X}.$$

**Démonstration :**

Soit  $a \in E$ ,

$$\begin{aligned} a \in \mathring{C}_E \dot{X} &\iff a \notin \dot{X} \\ &\iff \forall \delta > 0, B(a, \delta) \not\subset X \\ &\iff \forall \delta > 0, \exists x \in B(a, \delta) \cap \mathring{C}_E X \\ &\iff \forall \delta > 0, B(a, \delta) \cap \mathring{C}_E X \neq \emptyset \\ &\iff a \in \overline{C_E X} \end{aligned}$$

Pour la deuxième partie, il suffit d'appliquer l'assertion démontrée à  $\mathring{C}_E X$  et de prendre le complémentaire.  $\square$

### Proposition 12.14

Soit  $X$  une partie de  $E$ . Son adhérence  $\overline{X}$  est le plus petit fermé contenant dans  $X$ . En particulier,  $X$  est fermé si et seulement si  $X = \overline{X}$ .

**Démonstration :** D'après ce qui précède,  $\mathcal{C}_E \bar{X} = \overset{\circ}{\mathcal{C}_E X}$  qui est donc un ouvert d'où  $\bar{X}$  est un fermé.  
Maintenant, on a vu que  $X \subset \bar{X}$ .

Pour finir soit  $F$  un fermé contenant  $X$ . En prenant le complémentaire on en déduit que  $\mathcal{C}_E F$  est un ouvert contenu dans  $\mathcal{C}_E X$  (car le complémentaire est décroissant). De ce fait,

$$\mathcal{C}_E F \subset \overset{\circ}{\mathcal{C}_E X}$$

Donc, en reprenant le complémentaire,

$$\bar{X} = \overline{\mathcal{C}_E(\mathcal{C}_E X)} = \mathcal{C}_E \left( \overset{\circ}{\mathcal{C}_E X} \right) \subset \mathcal{C}_E(\mathcal{C}_E F) = F.$$

□

**Remarque :** On peut refaire une preuve « à la main » dans l'idée de celle de la proposition analogue pour l'intérieur.

**Exercices :**

1. Déterminer  $\bar{Q}$ .
2. (Classique) Montrer que l'adhérence et l'intérieur sont croissant
3. Que dire de  $\overset{\circ}{\bar{X}}$  et de  $\overline{\overset{\circ}{X}}$  ?

## 1.6 Caractérisation séquentielle des points adhérents et des fermés

La définition des fermés comme complémentaire des ouverts n'est pas la plus aisée pour montrer qu'un ensemble est fermé. Nous allons mettre en évidence, une méthode pour montrer qu'un point est un point d'adhérent (ou qu'un ensemble est fermé) à l'aide de suites.

### Théorème 12.15 (Caractérisation séquentielle des points adhérents et des fermés)

Soit  $X$  une partie de  $E$ .

1. Soit  $a \in E$ , il est adhérent à  $X$  (c'est-à-dire  $a \in \bar{X}$ ) si et seulement si il existe une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  qui converge vers  $a$ .
2. L'ensemble  $X$  est fermé si et seulement si toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  qui converge (dans  $E$ ) a sa limite dans  $X$ .

**Remarques :**

1. La première assertion illustre bien qu'un point adhérent à  $X$  est bien un point qui appartient à  $X$  ou qui est juste « à côté » de  $X$ .
2. La deuxième assertion illustre la notion de fermé. Cela signifie que l'on ne peut pas « sortir » de  $X$ .

**Démonstration :**

1. –  $\Rightarrow$  On suppose que  $a$  est adhérent à  $X$ . De ce fait pour tout entier  $n$ ,  $B(a, \frac{1}{n+1}) \cap X \neq \emptyset$ . Il existe donc un élément  $x_n \in B(a, \frac{1}{n+1}) \cap X$ . La suite  $(x_n)$  est bien une suite d'éléments de  $X$ . De plus, par construction,  $\|x_n - a\| \leq \frac{1}{n+1}$  donc  $(x_n) \rightarrow a$ .  
Notons que l'on peut faire la même preuve avec les boules  $B(a, \delta_n)$  où  $(\delta_n)$  est une suite qui tend vers 0.
- $\Leftarrow$  On suppose qu'il existe une suite  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$  telle que  $(x_n) \rightarrow a$ . Montrons que  $a$  est alors un point adhérent de  $X$ . Soit  $\delta > 0$ ,  $B(a, \delta)$  rencontre  $X$ . En effet il existe un terme de la suite  $(x_n)$  tel que  $\|x_n - a\| < \delta$ .
2. –  $\Rightarrow$  On veut montrer que si  $X$  est fermé alors toute suite à valeurs dans  $X$  convergente (dans  $E$ ) a sa limite dans  $X$ . Soit  $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$  et  $a = \lim(x_n)$ . D'après l'énoncé précédent  $a$  est adhérent à  $X$  et donc  $a \in X$  car  $X$  est fermé ( $X = \bar{X}$ ).
- $\Leftarrow$  Soit  $a \in \bar{X}$ . D'après ce qui précède, il existe une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  tels que  $(x_n) \rightarrow a$ . Par hypothèse, on obtient donc que  $a \in X$ . Finalement,  $X = \bar{X}$  ce qui montre que  $X$  est fermé.

□

**Remarque :** C'est souvent cette caractérisation que l'on utilise pour montrer qu'un ensemble est fermé.

### Proposition 12.16

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $F$  un sous-espace vectoriel. S'il est de dimension finie alors il est fermé.



**Démonstration :** Considérons une base  $(e_1, \dots, e_p)$  de  $F$ . Soit  $(x_n)$  une suite d'éléments de  $F$  qui converge vers un élément  $x$  dans  $E$ . Supposons par l'absurde que  $x \notin E$  et considérons  $F' = F \oplus \text{Vect}(x)$ ; on note alors  $e_{p+1} = x$  car  $(e_1, \dots, e_p, x)$  est une base de  $F'$ . La suite  $(x_n)$  est une suite convergente de  $F'$  qui est de dimension finie. Pour tout  $i \in \llbracket 1; p+1 \rrbracket$ ,  $e_i^* : F \rightarrow \mathbf{K}$  est une application linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie donc elle est continue. On en déduit que pour tout  $i \in \llbracket 1; p+1 \rrbracket$ ,  $(e_i^*(x_n)) \rightarrow e_i^*(x)$  ce qui est absurde car pour tout entier  $n$ ,  $e_{p+1}^*(x_n) = 0$  et  $e_{p+1}^*(x) = 1$ .  $\square$

**Remarque :** Cela n'est plus vrai si  $F$  n'est pas de dimension finie.

Par exemple, si on considère  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$ . On considère la norme  $\|\cdot\|_1$  sur  $E$ . On considère  $F = \{f \in E, f(0) = 0\}$ . Pour tout entier naturel  $n$  non nul on pose  $f_n : x \mapsto x^{1/n}$  qui appartient à  $F$ . La suite  $(f_n)$  converge dans  $E$  vers la fonction constante égale à 1 notée  $g$  car pour tout entier  $n$ ,

$$\|f_n - g\|_1 = \int_0^1 |1 - t^{1/n}| dt = \int_0^1 1 - t^{1/n} dt = 1 - \left[ \frac{t^{\frac{n+1}{n}}}{\frac{n+1}{n}} \right]_0^1 = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Cela montre que  $\|f_n - g\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Par contre  $g \notin F$ .

### ATTENTION

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel strict (c'est-à-dire  $F \neq E$ ). Son intérieur est vide. Soit  $u$  un vecteur qui n'est pas dans  $F$ . Soit  $x \in F$ , pour tout  $\delta > 0$ ,  $w = x + \frac{\delta}{2} \frac{u}{\|u\|}$  n'appartient pas à  $F$  par construction et  $w \in B(x, \delta)$ . On en déduit que  $x \notin \overset{\circ}{F}$  et donc  $\overset{\circ}{F} = \emptyset$ .

**Exercice :** (CLASSIQUE) On note  $S_n(\mathbf{R})$  l'ensemble des matrices stochastiques, c'est-à-dire les matrices  $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  telles que

- $\forall (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2, m_{ij} \geq 0$
- $\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{i=1}^n m_{ij} = 1$ .

Montrer que  $S_n(\mathbf{R})$  est un fermé de  $(\mathcal{M}_n(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$

- En montrant que son complémentaire est ouvert.
- En utilisant la caractérisation séquentielle.

## 1.7 Frontière

Pour toute partie  $X$  de  $E$ , on a vu que  $\overset{\circ}{X} \subset X \subset \overline{X}$ . La frontière d'une partie est la différence entre son adhérence et son intérieur. Dans le cas des boules (ouvertes ou fermées) ce sont les sphères.

### Définition 12.17

Soit  $X \subset E$ , on appelle frontière de  $X$  et on note  $\partial X = \overline{X} \setminus \overset{\circ}{X}$ .

**Remarque :** Comme  $\partial X = \overline{X} \cap \overset{\circ}{\complement_E X}$  c'est un fermé comme intersection de deux fermés.

**Exemples :**

- Si  $X$  est une boule (ouverte ou fermée) de centre  $a$  et de rayon  $r$  alors  $\overline{X}$  est la boule fermée et  $\overset{\circ}{X}$  est la boule ouverte donc  $\partial X$  est la sphère  $S(a, r)$ .
- Si  $X$  est ouvert et fermé alors  $\partial X = \emptyset$ .

**Exercice :** Calculer  $\partial]0, 1[$  et  $\partial\mathbf{Q}$ .

## 1.8 Densité

La notion de parties denses vues en première année dans le cas où  $E = \mathbf{R}$  s'étend au cadre général des espaces vectoriels normés.

### Définition 12.18 (Densité)

Soit  $X$  une partie de  $E$ . Elle est dite dense (dans  $E$ ) si  $\overline{X} = E$ . C'est-à-dire que tout point de  $E$  est adhérent à  $X$ .

**Proposition 12.19**

Soit  $X$  une partie de  $E$ . Les assertions suivantes sont équivalentes

- i)  $X$  est dense
- ii) Toute boule ouverte  $B(a, \delta)$  où  $\delta > 0$  rencontre  $X$ .
- iii) Pour tout point  $a$  de  $E$  il existe une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  convergeant vers  $a$ .

**Démonstration :** Il suffit d'utiliser les propositions vues sur les points adhérents. □

**Exemples :**

1. Dans le cours de première année on a vu que  $\mathbb{Q}$  l'ensemble des nombres rationnels et  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$  l'ensemble des nombres irrationnels sont dans  $\mathbb{R}$ . Il suffit d'approcher tout nombre par un décimal ou par  $\pi + r$  où  $r$  est un décimal.

**Exercice :** Montrer que  $GL_n(\mathbb{C})$  est dense dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**Théorème 12.20** (Théorème de Stone-Weierstrass)

Soit  $f$  une fonction continue sur un segment  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe une fonction polynomiale  $P$  telle que  $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$ . En particulier,  $f$  est limite uniforme de fonctions polynomiales ce qui signifie qu'il existe une suite  $(P_n)$  de fonctions polynomiales telle que  $P_n \xrightarrow{CU} f$ .

**Démonstration :** Voir devoir □

**Exemple :** Soit  $f$  une fonction réelle continue sur  $[a, b]$ . On suppose que pour entier  $n$ ,

$$\int_a^b f(t)t^n dt = 0.$$

On veut montrer que  $f$  n'est pas nul.

On remarque d'abord que par linéarité, pour tout polynôme  $P$ ,

$$\int_a^b f(t)P(t)dt = 0.$$

Maintenant pour  $\varepsilon > 0$ , il existe d'après le théorème de Stone-Weierstrass un polynôme  $P$  tel que  $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$ . On a alors

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f^2(t)dt \right| &= \left| \int_a^b f(t)P(t)dt + \int_a^b f(t)(f(t) - P(t))dt \right| \\ &\leq \left| \int_a^b f(t)P(t)dt \right| + \left| \int_a^b f(t)(f(t) - P(t))dt \right| \\ &\leq 0 + \varepsilon \int_a^b |f(t)|dt \end{aligned}$$

Maintenant la valeur  $\int_a^b |f(t)|dt$  est fixé donc en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0 on obtient que  $\int_a^b f^2(t)dt = 0$  et donc  $f = 0$ .

**1.9 Invariance par changement de normes équivalentes**

On a déjà vu que si on remplace la norme  $\|\cdot\|$  par une norme  $N$  qui lui est équivalente, on ne modifie pas le caractère convergent des suites. Nous allons voir que cela ne modifie pas toutes les propriétés topologiques définies précédemment.

**Théorème 12.21**

Soit  $\|\cdot\|$  et  $N$  deux normes équivalentes sur  $E$  et  $X$  une partie de  $E$ .

1. La partie  $X$  est ouverte pour  $\|\cdot\|$  si et seulement si elle est ouverte pour  $N$ .
2. La partie  $X$  est fermée pour  $\|\cdot\|$  si et seulement si elle est fermée pour  $N$ .
3. L'adhérence (resp. l'intérieur) de  $X$  pour  $\|\cdot\|$  est l'adhérence (resp. l'intérieur) pour  $N$ .
4. La partie  $X$  est dense pour  $\|\cdot\|$  si et seulement si elle est dense pour  $N$ .

**Remarque :** Cela signifie aussi que si  $a \in E$  et  $X \subset E$  le fait que  $a$  soit adhérent à  $X$  ou que  $X$  soit un voisinage de  $a$  ne dépend pas de la norme.

**Démonstration :**

1. Soit  $X$  une partie ouverte pour  $N$ . Montrons qu'elle est ouverte pour  $\|\cdot\|$ . Soit  $a \in X$ , comme  $X$  est ouverte pour  $N$ , il existe  $\delta > 0$  telle que  $B_N(a, \delta) \subset X$ . On sait qu'il existe  $C > 0$  tel que  $N \leq C\|\cdot\|$  donc  $B_{\|\cdot\|}(a, \frac{\delta}{C}) \subset B_N(a, \delta)$  donc il existe  $\delta' = \frac{\delta}{C}$  tel que  $B_{\|\cdot\|}(a, \delta') \subset B_N(a, \delta) \subset X$ . On en déduit que  $X$  est ouvert pour  $\|\cdot\|$ .  
L'implication inverse est identique par symétrie en utilisant qu'il existe  $C' > 0$  tel que  $\|\cdot\| \leq C'N$
2. Cela découle de 1. en passant au complémentaire.
3. Pour l'adhérence (resp. l'intérieur) il suffit d'utiliser que c'est le plus petit fermé contenant  $X$  (resp. le plus grand ouvert contenu dans  $X$ ).
4. Cela découle de l'invariance de l'adhérence.

□

### ATTENTION

Ce résultat n'est plus vrai pour des normes qui ne sont pas équivalentes. Si on considère  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$  et  $X = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ .

- On peut voir que  $X$  est un fermé pour  $\|\cdot\|_\infty$ . En effet soit  $(f_n)$  une suite de fonctions qui tend vers  $f$  pour  $\|\cdot\|_\infty$  alors, en particulier,  $(f_n(0))$  tend vers  $(f(0))$  et donc  $f \in X$ .
- Pour  $\|\cdot\|_1$ ,  $X$  n'est plus fermé. Il est même dense dans  $E$ , on peut « approcher » toute fonction  $f$  de  $E$  par une fonction  $g$  de  $X$  telle que  $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$ .

## 1.10 Topologie induite

Soit  $A$  une partie de  $E$  les notions d'ouverts (et de fermés) de  $E$  permettent de définir des ouverts (et des fermés) de  $A$ .

**Exemple :** Si on considère  $E = \mathbf{R}^2$  et  $A$  la boule fermée unité. On veut dire que si  $H = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\}$  alors  $H \cap A$  est un ouvert. En effet, si on oublie ce qui se passe « en dehors » de  $A$ , si  $\alpha \in H \cap A$  alors tous les points « proches » de  $\alpha$  sont dans  $H \cap A$ .

### Définition 12.22

Soit  $X$  une partie de  $A$ . On dit que  $X$  est un ouvert relatif de  $A$  si pour tout  $x$  de  $X$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $B(x, \delta) \cap A \subset X$ .

### ATTENTION

Il est important de voir que l'on ne demande pas que l'intégralité de la boule soit sans  $X$  mais juste  $B(x, \delta) \cap A$  que l'on appelle sa *trace* sur  $A$ .

**Exemples :**

1. Si on considère  $A = ]0, 1]$  alors l'ensemble  $X = ]0, 1]$  est un ouvert relatif à  $A$ , en effet pour tout  $x \in A$ ,  $B(x, 1) \cap A \subset A$ .
2. De manière générale,  $A$  est toujours un ouvert relatif de lui même.

### Définition 12.23

1. Soit  $X$  une partie de  $A$ . On dit que c'est un fermé relatif de  $A$  si  $\complement_A X$  est un ouvert relatif de  $A$ .
2. Soit  $X$  une partie de  $A$  et  $x \in X$ . On dit que  $X$  est un voisinage relatif de  $x$  dans  $A$  s'il existe  $\delta > 0$  tel que  $B(x, \delta) \cap A \subset X$ .

**Exemples :**

1. Pour  $A = \mathbf{R}^*$ , l'intervalle  $X = ]0, 1]$  est un fermé relatif car son complémentaire (dans  $A$ )  $] -\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[$  est un ouvert relatif (car c'est un ouvert de  $\mathbf{R}$ ).
2. Dans  $A = \mathbf{N}$ , tous les singletons sont des fermés relatifs (car ce sont des fermés). Ce sont aussi des ouverts relatifs pour  $A$  car pour  $n \in \mathbf{N}$ ,  $B(n, \frac{1}{2}) \cap A \subset \{n\}$ . De fait, toutes les parties de  $A$  sont des ouverts relatifs (et donc des fermés relatifs). On dit alors que  $A$  est une partie discrète.

**Proposition 12.24** (Caractérisation séquentielle des fermés relatifs)

Soit  $X$  une partie de  $A$ . C'est un fermé relatif de  $A$  si et seulement pour toute suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  qui converge dans  $A$  a sa limite dans  $X$ .

**Démonstration :** Il suffit de reprendre le principe de la démonstration de la caractérisation séquentielle.

- $\Rightarrow$  On suppose que  $X$  est un fermé relatif à  $A$  donc  $U = \complement_A X$  est un ouvert relatif à  $A$ . Maintenant si  $(x_n)$  est une suite d'éléments de  $X$  qui converge dans  $A$ . On note  $\ell$  sa limite. Supposons par l'absurde qu'elle n'est pas dans  $X$ , elle est donc dans  $U$  qui est ouvert. On peut donc trouver  $\delta > 0$  tel que  $B(\ell, \delta) \cap A \subset U$  ce qui est absurde car cela implique que  $\|x_n - \ell\| \geq \delta$ .
- $\Leftarrow$  Par contraposée, montrons que si  $X$  n'est pas un fermé relatif (donc si  $U = \complement_A X$  n'est pas un ouvert relatif à  $A$ ) alors on peut trouver une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $X$  convergeant dans  $A$  mais pas dans  $X$  (c'est-à-dire dont la limite appartient à  $U$ ). Il suffit d'utiliser que, comme  $U$  n'est pas ouvert, il existe  $\ell \in U$  tel que pour tout  $n$ ,  $B(\ell, \frac{1}{n+1}) \cap A$  contient un élément qui n'est pas dans  $U$  donc qui appartient à  $X$ .

□

**Exemple :** On peut montrer que  $X = ]0, \frac{1}{2}]$  est un fermé de  $]0, 1]$ . En effet soit  $(x_n)$  une suite de  $]0, \frac{1}{2}]$  qui a une limite dans  $]0, 1]$  alors sa limite appartient à  $X$ .

**Proposition 12.25**

Soit  $A$  une partie de  $E$ .

1. La partie  $X$  est un ouvert relatif de  $A$  si et seulement s'il existe un ouvert  $U$  de  $E$  tel que  $X = U \cap A$ . On dit que  $X$  est la trace de  $U$ .
2. La partie  $X$  est un fermé relatif de  $A$  si et seulement s'il existe un fermé  $F$  de  $E$  tel que  $X = F \cap A$ . On dit que  $X$  est la trace de  $F$ .

**Démonstration :**

1. –  $\Rightarrow$  On suppose que  $X$  est un ouvert relatif. On sait alors que pour tout  $x$  de  $X$ , il existe  $\delta_x$  tel que  $B(x, \delta_x) \cap A \subset X$ . Posons

$$U = \bigcup_{x \in X} B(x, \delta_x)$$

Il est clair que  $U$  est un ouvert (de  $E$ ) comme réunion d'ouverts. De plus,  $X \subset U$  par construction, comme  $X \subset A$  on a bien  $X \subset U \cap A$ . Inversement,

$$U \cap A = \bigcup_{x \in X} (B(x, \delta_x) \cap A) \subset X.$$

- $\Leftarrow$  Soit  $U$  un ouvert de  $E$  tel que  $X = U \cap A$ . Soit  $x \in X$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $B(x, \delta) \subset U$  donc  $B(x, \delta) \cap A \subset U \cap A = X$ .
2. Découle de 1. en passant au complémentaire.

**Corollaire 12.26**

Soit  $A$  une partie de  $E$ . L'ensemble des ouverts relatifs de  $A$  est stable par intersection finie et par réunion quelconque.

## 2 Étude locale d'une application

Nous allons dans ce chapitre généraliser la notions de limite et de fonctions continues au cas des fonctions  $f$  d'un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|_E)$  dans un autre  $(F, \|\cdot\|_F)$ . Cela généralise les cas déjà étudié en première année où  $E$  et  $F$  valent  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ .

### 2.1 Limite en un point adhérent

#### Définition 12.27

Soit  $f$  une fonction définie sur une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|_E)$  à valeurs dans un autre  $(F, \|\cdot\|_F)$ . Soit  $a$  un point adhérent à  $A$  et  $\ell \in F$ . On dit que  $f$  tend vers  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $a$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$$

Remarques :

1. Dans le cas des fonctions de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , la définition peut s'écrire avec des intervalles. Là on peut l'écrire avec des boules. On a  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$  si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $f(\bar{B}(a, \eta)) \subset \bar{B}(\ell, \varepsilon)$ .
2. On peut écrire cette définition avec des inégalités strictes (c'est-à-dire des boules ouvertes) car pour  $\varepsilon$ , la boule fermée de rayon  $\frac{\varepsilon}{2}$  est inclus dans la boule ouverte de rayon  $\varepsilon$ . Donc, pour cette boule fermée, il existe un  $\eta$  tel que  $f(\bar{B}(a, \eta)) \subset \bar{B}(\ell, \frac{\varepsilon}{2})$ . On a alors

$$f(B(a, \eta)) \subset f(\bar{B}(a, \eta)) \subset \bar{B}(\ell, \frac{\varepsilon}{2}) \subset B(\ell, \varepsilon)$$

3. On peut reformuler cette définition avec des voisinages relatifs. En effet cela peut s'écrire que pour tout voisinage  $\mathcal{V}$  de  $\ell$  il existe un voisinage relatif  $\mathcal{U}$  de  $a$  dans  $A$  tel que  $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$ .

#### Définition 12.28 (Extension aux cas où $a = \infty$ et $\ell = \infty$ )

On reprend les mêmes notations

1. On suppose que  $A$  n'est pas borné. On dit que  $f$  tend vers  $\ell \in F$  quand  $\|x\|_E \rightarrow \infty$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in A, \|x\|_E \geq M \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors  $f(x) \xrightarrow{\|x\|_E \rightarrow \infty} \ell$ .

**Noter que c'est  $\|x\|_E \rightarrow \infty$  et pas  $x \rightarrow \infty$ .**

2. Si  $F = \mathbf{R}$ . Soit  $a$  un point adhérent à  $A$ . On dit que  $f$  tend vers  $\infty$  quand  $x \rightarrow a$  si

$$\forall M \in \mathbf{R}_+, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow |f(x)| \geq M.$$

On note alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \infty$ .

3. On suppose que  $E = \mathbf{R}$ . On suppose que  $A$  n'est pas majoré (resp. n'est pas minoré). On dit que  $f$  tend vers  $\ell \in F$  quand  $x \rightarrow +\infty$  (resp. quand  $x \rightarrow -\infty$ ) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in A, x \geq M \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon$$

$$(\text{resp. } \forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbf{R}, \forall x \in A, x \leq m \Rightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon).$$

On note alors  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$  (resp.  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \ell$ ).

**Proposition 12.29** (Unicité de la limite)

On reprend les mêmes notations. On suppose qu'il existe  $\ell$  et  $\ell'$  dans  $F$  tels que  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$  et  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$ .  
On a alors  $\ell = \ell'$ .

**Terminologie :** Quand  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$  on dit  $\ell$  est la limite de  $f$  quand  $x$  tend vers  $a$  et on note

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell \text{ ou } \lim_a f = \ell.$$

**Démonstration :** Il suffit de recopier la démonstration usuelle. □

**Proposition 12.30**

Avec les mêmes notations. Si  $\lim_a f = \ell$  alors  $f$  est bornée au voisinage de  $a$ .

**Démonstration :** Il suffit de prendre  $\varepsilon = 1$  par exemple. Il existe alors  $\eta$  tel que si  $x$  appartient à  $B(a, \eta) \cap A$  alors  $f(x) \in B(\ell, 1)$ . □

**Théorème 12.31** (Caractérisation séquentielle de la limite)

Soit  $f$  une fonction de  $A$  dans  $F$ . Soit  $a$  un point adhérent à  $A$  et  $\ell \in F$ .

$$\left( \lim_a f = \ell \right) \iff \left( \forall (u_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim(u_n) = a \implies \lim(f(u_n)) = \ell \right).$$

**Démonstration :**

- $\boxed{\implies}$  On suppose que  $\lim_a f = \ell$ . On considère une suite  $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$  qui converge vers  $a$ , on veut montrer que  $\lim(f(u_n)) = \ell$ , c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \implies \|f(u_n) - \ell\| \leq \varepsilon$$

Pour  $\varepsilon > 0$ , comme  $\lim_a f = \ell$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $x$  de  $A$ , si  $\|x - a\|_E \leq \eta$  alors  $\|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon$ .  
Maintenant pour ce  $\eta$ , comme  $\lim(u_n) = a$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout entier  $n$ ,  $n \geq N \implies \|u_n - a\| \leq \eta$ . On a donc

$$n \geq N \rightarrow \|f(u_n) - \ell\| \leq \varepsilon.$$

On a bien  $\lim(f(u_n)) = \ell$ .

- $\boxed{\impliedby}$  On procède par contraposée. On montre que si la limite de  $f$  en  $a$  n'est pas  $\ell$  (ce qui signifie que l'on peut avoir  $\lim_a f \neq \ell$  ou que  $f$  n'a pas de limite en  $a$ ) alors il existe une suite  $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$  qui tend vers  $a$  et telle que  $(f(u_n))$  ne tend pas vers  $\ell$ . Le fait que la limite de  $f$  en  $a$  n'est pas  $\ell$  signifie que

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in A, \|x - a\|_E \leq \eta \text{ et } \|f(x) - \ell\|_F > \varepsilon.$$

On prend alors un  $\varepsilon$  vérifiant l'assertion ci-dessous et on l'applique pour  $\eta = \frac{1}{n+1}$ . On peut alors construire une suite  $(x_n)$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n - a\| \leq \frac{1}{n+1}$$

donc  $(x_n) \rightarrow a$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, \|f(x_n) - \ell\|_F > \varepsilon$  donc  $(f(x_n))$  ne tend pas vers  $\ell$ . □

**Proposition 12.32**

Soit  $f$  une fonction de  $A$  dans  $F$ . Soit  $a$  adhérent à  $A$  et  $\ell \in F$ .

$$\left( \lim_a f = \ell \right) \iff \left( \lim_{x \rightarrow a} \|f(x) - \ell\| = 0 \right)$$

Démonstration : Exercice. □

**Proposition 12.33**

Soit  $(F_1, \|\cdot\|_1), \dots, (F_n, \|\cdot\|_n)$  des espaces vectoriels normés. On pose  $F = F_1 \times \dots \times F_n$  avec la norme produit notée  $\|\cdot\|_F$ . Soit  $f$  une application d'une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|_E)$  dans  $F$ . On note pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  la  $i$ -ème composante telle que

$$\forall x \in A, f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)).$$

Soit  $a$  un point adhérent à  $A$  et  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in F$ .

$$\left(\lim_a f = \ell\right) \iff \left(\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_a f_i = \ell_i\right).$$

Démonstration :

–  $\Rightarrow$  On suppose que  $(\lim_a f = \ell)$ . On a donc que  $\|f(x) - \ell\| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ . Pour tout  $i$ ,

$$\|f_i(x) - \ell_i\|_i \leq \|f(x) - \ell\| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0.$$

On a donc bien que pour  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\lim_a f_i = \ell_i$ .

–  $\Leftarrow$  On suppose que pour tout entier  $i$  dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\lim_a f_i = \ell_i$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , il existe  $\eta_i$  tel que

$$\forall x \in A, \|x - a\|_i \leq \eta_i \Rightarrow \|f_i(x) - \ell_i\|_i \leq \varepsilon$$

Il suffit donc de poser  $\eta = \min_{1 \leq i \leq n} \eta_i$ . □

**Remarque :** En particulier, si  $F$  est un espace de dimension finie et si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $F$ . Pour  $f : A \rightarrow F$ , on peut noter  $f_i = e_i^* \circ f$  la  $i$ -ème composante de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ . On a alors pour  $a$  adhérent à  $A$  et  $\ell = \ell_1 e_1 + \dots + \ell_n e_n$  :

$$\left(\lim_a f = \ell\right) \iff \left(\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lim_a f_i = \ell_i\right).$$

## 2.2 Composition

**Proposition 12.34** (Limite d'une composée)

Soit  $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$  et  $(G, \|\cdot\|_G)$  trois espaces vectoriels normés. Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $B$  une partie de  $F$ . On considère  $f$  une application de  $A$  dans  $F$  telle que  $f(A) \subset B$  et  $g$  une application de  $B$  dans  $G$ . Soit  $a$  un point adhérent de  $A$  et  $b \in F$ . On suppose que  $\lim_a f = b$ . Alors

1. Le point  $b$  est adhérent à  $B$ .
2. S'il existe  $\ell \in G$  tel que  $\lim_b g = \ell$  alors  $\lim_a g \circ f = \ell$ .

Démonstration :

1. Comme  $a$  est adhérent à  $A$ , il existe une suite  $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$  telle que  $(x_n) \rightarrow a$ . Comme, de plus  $\lim_a f = b$  alors la suite  $(f(x_n))$  tend vers  $b$ . Mais comme  $(f(x_n))$  est une suite d'éléments de  $B$  on obtient que  $b \in \overline{B}$ .
2. Utilisons (pour changer) la définition de la limite par des voisinages. On sait que pour tout voisinage  $\mathcal{V}_\ell$  de  $\ell$  dans  $G$ , il existe un voisinage relatif  $\mathcal{V}_b$  de  $b$  dans  $B$  tel que  $g(\mathcal{V}_b) \subset \mathcal{V}_\ell$ . Maintenant pour le voisinage  $\mathcal{V}_b$  est la trace dans  $B$  d'un voisinage  $\mathcal{V}'_b$  de  $b$  dans  $F$ . Pour ce voisinage, il existe un voisinage relatif  $\mathcal{V}_a$  de  $a$  dans  $A$  tel que  $f(\mathcal{V}_a) \subset \mathcal{V}'_b$ . On a même  $f(\mathcal{V}_a) \subset \mathcal{V}_b$  car  $f(A) \subset B$ . Finalement  $(g \circ f)(\mathcal{V}_a) \subset \mathcal{V}_\ell$ . □

## 2.3 Opérations sur les limites

### Proposition 12.35 (Combinaisons linéaires)

Soit  $f_1, f_2$  deux fonctions définies sur une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|_E)$  à valeurs dans un autre  $(F, \|\cdot\|_F)$ . Soit  $a$  un point adhérent à  $A$ . Soit  $\lambda \in \mathbf{K}$  (où  $\mathbf{K}$  est le corps de base de  $F$ ). Si  $\lim_a f_1 = \ell_1$  et  $\lim_a f_2 = \ell_2$  alors  $\lim_a (f_1 + f_2) = \ell_1 + \ell_2$  et  $\lim_a \lambda f_1 = \lambda \ell_1$ .

Démonstration : Exercice □

### Proposition 12.36 (Produit)

Soit  $f_1, f_2$  deux fonctions définies sur une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|_E)$  à valeurs dans un autre  $(F, \|\cdot\|_F)$ . Soit  $a$  un point adhérent à  $A$ . On suppose que  $F$  est une algèbre et que  $\|\cdot\|_F$  vérifie qu'il existe  $C > 0$ , tel que pour  $(y, y') \in F^2$ ,  $\|y \times y'\|_F \leq C \|y\|_F \|y'\|_F$ .  
Si  $\lim_a f_1 = \ell_1$  et  $\lim_a f_2 = \ell_2$  alors  $\lim_a (f_1 \times f_2) = \ell_1 \times \ell_2$ .

Démonstration : On peut se ramener au cas des suites pour prouver cela. En effet pour toute suite  $(x_n)$  tendant vers  $a$ ,  $(f_1(x_n))$  tend vers  $\ell_1$  et  $(f_2(x_n))$  tend vers  $\ell_2$  d'après le sens  $\Rightarrow$  de la caractérisation séquentielle. On en déduit que la suite  $(f_1 \times f_2(x_n))$  tend vers  $\ell_1 \times \ell_2$  d'après les propriétés des limites de suites. Le sens  $\Leftarrow$  de la caractérisation séquentielle permet alors de conclure. □

## 2.4 Continuité

Là encore, on généralise la notion de fonction continue en un point (où  $f$  est définie) et de fonctions continues.

### Définition 12.37

Soit  $f$  une fonction définie sur une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $E$  à valeurs dans  $F$ . Soit  $a \in A$ . On dit que  $f$  est continue en  $a$  si  $f$  a une limite en  $a$ .

Remarque : La limite est alors nécessairement  $f(a)$ . En effet si on note  $\ell$  la limite alors pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\|f(a) - \ell\| \leq \varepsilon$ . On peut donc dire

$$(f \text{ est continue en } a) \iff \left( \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \right).$$

On peut reprendre la caractérisation séquentielle.

### Proposition 12.38 (Caractérisation séquentielle de la continuité en $a$ )

Soit  $f$  une fonction définie sur une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $E$  à valeurs dans  $F$ . Soit  $a \in A$ .

$$(f \text{ est continue en } a) \iff \left( \forall (u_n) \in A^{\mathbf{N}}, \lim(u_n) = a \Rightarrow \lim(f(u_n)) = f(a) \right).$$

On peut de même réécrire les opérations algébriques ainsi que les composées de limites

### Proposition 12.39 (Combinaisons linéaires)

Soit  $f_1, f_2$  deux fonctions définies sur une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|_E)$  à valeurs dans un autre  $(F, \|\cdot\|_F)$ . Soit  $a$  un point de  $A$ . Soit  $\lambda \in \mathbf{K}$  (où  $\mathbf{K}$  est le corps de base de  $F$ ). Si  $f_1$  et  $f_2$  sont continues en  $a$  alors  $f_1 + f_2$  et  $\lambda f_1$  aussi.



**Proposition 12.40 (Produit)**

Soit  $f_1, f_2$  deux fonctions définies sur une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $(E, \|\cdot\|_E)$  à valeurs dans un autre  $(F, \|\cdot\|_F)$ . Soit  $a$  un point de  $A$ . On suppose que  $F$  est une algèbre et que  $\|\cdot\|_F$  vérifie qu'il existe  $C > 0$ , tel que pour  $(y, y') \in F^2$ ,  $\|y \times y'\|_F \leq C\|y\|_F\|y'\|_F$ .  
Si  $f_1$  et  $f_2$  sont continues en  $a$  alors  $f_1 \times f_2$

**Proposition 12.41 (Composition)**

Soit  $(E, \|\cdot\|_E)$ ,  $(F, \|\cdot\|_F)$  et  $(G, \|\cdot\|_G)$  trois espaces vectoriels normés. Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $B$  une partie de  $F$ . On considère  $f$  une application de  $A$  dans  $F$  telle que  $f(A) \subset B$  et  $g$  une application de  $B$  dans  $G$ . Soit  $a$  un de  $A$  et  $b = f(a)$ . On suppose que  $f$  est continue en  $a$  et  $g$  est continue en  $b$  alors  $g \circ f$  est continue en  $a$ .

**Définition 12.42**

Soit  $f$  une fonction définie sur une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $E$  à valeurs dans  $F$ . Elle est dite continue si elle est continue en tout point de  $A$ .  
On note  $\mathcal{C}^0(A, F)$  l'ensemble des fonctions continues de  $A$  dans  $F$ .

**Exemples :**

1. Soit  $E = \mathbf{K}_n[X]$  avec la norme infinie. L'application  $\Delta : P \mapsto P'$  est continue. En effet, il est clair que  $\|\Delta(P)\| \leq n\|P\|$ . De ce fait pour  $P \in E$ ,

$$\lim_{Q \rightarrow P} \Delta(Q) = \lim_{H \rightarrow 0} \Delta(P + H) = \Delta(P) + \lim_{H \rightarrow 0} \Delta(H) = \Delta(P)$$

2. Si on travaille pour  $E = \mathbf{K}[X]$ , l'application de dérivation  $\Delta$  n'est plus continue (toujours pour la norme infinie). En effet, si on considère la suite  $P_n = \frac{1}{n}X^n$ , elle tend vers 0 mais  $\Delta(P_n) = X^{n-1}$  ne tend pas vers 0 car  $\|X^{n-1}\| = 1$ .
3. Soit  $p$  un entier. On considère les projections  $\pi_i : \mathbf{K}^p \rightarrow \mathbf{K}$  définie par  $(x_1, \dots, x_p) \rightarrow x_i$ . Si on considère la norme infinie sur  $\mathbf{K}^p$  alors  $\pi_i$  est continue. En effet, soit  $a = (a_1, \dots, a_p)$ . On sait que si on considère une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $\mathbf{K}^p$ , elle converge vers  $a$ , si et seulement si les composantes  $(\pi_i(x_n))$  convergent vers  $a_i$ . On en déduit que  $\pi_i$  est continue par la caractérisation séquentielle de la limite.

**ATTENTION**

Soit  $f$  une application entre deux espaces vectoriels normés  $E$  et  $F$ . On a vu qu'en remplaçant la norme de  $E$  ou celle de  $F$  par une norme équivalente, on ne change pas les « topologies » de ce fait on ne modifie pas le caractère continue de  $f$ . Cependant, si les normes ne sont plus équivalentes, ce n'est plus vrai. Par exemple, soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$  et  $F = \mathbf{R}$ . On considère  $\delta_0 : f \mapsto f(0)$ . Si on utilise la norme infinie alors  $f$  est continue. En effet,  $|\delta_0(f)| = |f(0)| \leq \|f\|_\infty$ . On peut alors démontrer que  $\delta_0$  est continue comme ci-dessus (voir aussi plus loin). Par contre, pour la norme  $\|\cdot\|_1$ , la fonction n'est plus continue. On peut le montrer en utilisant la suite de fonctions

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > \frac{1}{n} \\ 1 - nx & \text{sinon} \end{cases}$$

La suite de fonction  $(f_n)$  tend vers la fonction nulle mais pour autant  $(\delta_0(f_n)) \rightarrow 1 \neq 0$ .

**Proposition 12.43**

1. L'ensemble des fonctions continues de  $A$  dans  $F$  est un sous-espace vectoriel.
2. Soit  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels normés, soit  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  des applications continues. L'application,  $g \circ f$  est continue.
3. Soit  $E$  un espace vectoriel normé et  $F$  une algèbre avec une norme d'algèbre. Soit  $f_1$  et  $f_2$  des applications continues de  $A$  dans  $F$ . Le produit  $f_1 \times f_2$  est encore continue.
4. Soit  $f$  une application définie sur une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $E$  et à valeurs dans  $F$ . On ne modifie pas le caractère continue en remplaçant la norme de  $E$  et/ou de  $F$  par une norme équivalente.

**Démonstration :** Il suffit d'utiliser les propriétés vues précédemment en tout point  $a$  de  $A$ . □

**Exemple :** Soit  $p$  un entier. On appelle monôme de  $\mathbf{K}^p$  dans  $\mathbf{K}$  une application  $f_{i_1, \dots, i_p}$  de la forme

$$f : (x_1, \dots, x_p) \mapsto x_1^{i_1} \times \dots \times x_p^{i_p}.$$

On a vu que les projections étaient continues (pour la norme infinie) donc les monômes aussi.

On appelle polynôme toute somme d'un nombre fini de monômes.

Par exemple  $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + 3x_1x_3 - 7x_2^2x_1^2$  est un polynôme.

D'après ce qui précède, se sont des applications continues.

Plus généralement,

**Définition 12.44** (Polynômes en les coordonnées)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$ .

On appelle polynôme en les coordonnées une application  $f : E \rightarrow \mathbf{K}$  de la forme

$$f : x \mapsto \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \llbracket 0; d \rrbracket^n} a_{i_1, \dots, i_n} e_1^*(x)^{i_1} \times \dots \times e_n^*(x)^{i_n}$$

où  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  et  $d$  est un entier naturel.

**Remarques :**

1. C'est juste une généralisation des fonctions polynomiales vues précédemment.
2. Le choix de la base ne modifie pas le caractère polynomial car les formules de changement de base sont polynomiales.

**Exemple :** Le déterminant est un polynôme en les coordonnées.

**Proposition 12.45**

Les applications polynomiales sont continues.

**Démonstration :** Ce sont des sommes et des produits des  $e_i^*$  qui sont continues. □

**Proposition 12.46**

Soit  $f$  et  $g$  deux applications continues définies sur  $A$  et à valeurs dans  $F$ . On suppose qu'il existe une partie  $H$  dense dans  $A$  telle que  $f$  et  $g$  coïncident sur  $H$  alors  $f = g$ .

**Démonstration :** Soit  $a \in A$ , comme  $H$  est dense dans  $A$ , il existe une suite  $(x_n)$  d'éléments de  $H$  qui tend vers  $a$ . Maintenant, pour tout entier  $n$ ,  $f(x_n) = g(x_n)$ . Or, par continuité,

$$(f(x_n)) \rightarrow f(a) \quad \text{et} \quad (g(x_n)) \rightarrow g(a)$$

On en déduit que  $f = g$ . □

**Exemple :** Soit  $f$  une application de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ . On la suppose continue et qu'elle vérifie que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y).$$

En posant  $\alpha = f(1)$ . On montre aisément par récurrence que

- $\forall n \in \mathbf{N}, f(n) = n\alpha$
- $\forall n \in \mathbf{Z}, f(n) = n\alpha$
- $\forall r \in \mathbf{Q}, f(r) = r\alpha$

On en déduit que  $f$  coïncide avec  $g : x \mapsto x\alpha$  sur  $\mathbf{Q}$  qui est dense dans  $\mathbf{R}$ , comme  $g$  est aussi continue,  $f = g$ .

## 2.5 Caractérisation du caractère continu par les images réciproques

### Théorème 12.47

Soit  $f$  une application d'une partie  $A$  de  $E$  dans  $F$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) L'application  $f$  est continue.
- ii) L'image réciproque de tout ouvert  $U$  de  $F$  est un ouvert relatif de  $A$ .
- iii) L'image réciproque de tout fermé  $X$  de  $F$  est un fermé relatif de  $A$ .

**Démonstration :**

- En remarquant que si  $X$  est une partie de  $F$ ,  $f^{-1}(\bigcup_F X) = \bigcup_A f^{-1}(X)$  il est clair que ii et iii sont équivalents.
- $i) \Rightarrow ii)$  On suppose que  $f$  est continue, on se donne un ouvert  $U$  de  $F$  et on note  $V = f^{-1}(U)$ . Montrons que  $V$  est un ouvert. Pour cela on se donne  $a \in V$  et on pose  $y = f(a) \in U$ . Comme  $U$  est un ouvert, il existe  $\varepsilon$  tel que  $B(y, \varepsilon) \subset U$ .  
Maintenant, comme  $f$  est continue, pour  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta$  tel que pour tout  $x$  de  $A$ ,  $x \in B(a, \eta) \Rightarrow f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$ . Dit autrement,  $B(a, \eta) \cap A \subset f^{-1}(B(y, \varepsilon)) \subset f^{-1}(U) = V$ . On a bien montré que  $V$  était un ouvert relatif.
- $ii) \Rightarrow i)$  On suppose que l'image réciproque de tout ouvert  $U$  de  $F$  est un ouvert relatif de  $A$ . Soit  $a \in A$ , on pose  $y = f(a)$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , la boule ouverte de centre  $y$  et de rayon  $\varepsilon$  est un ouvert. Son image réciproque  $V$  est donc un ouvert qui contient  $a$ . On en déduit qu'il existe  $\eta > 0$  tel que  $B(a, \eta) \cap A \subset V$ . En appliquant  $f$  on obtient que

$$\forall x \in A, \|x - a\| < \eta \Rightarrow f(x) \in B(y, \varepsilon).$$

L'application  $f$  est donc continue. □

**Exemples :**

1. Soit  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  telle que  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Comme c'est un polynôme elle est continue. On en déduit que l'image réciproque du fermé  $\{1\}$  c'est-à-dire la sphère  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  est un fermé.
2. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Soit  $f_1, \dots, f_r$  des applications polynomiales (par exemple des applications linéaires). L'ensemble  $A = \{x \in E, f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0\}$  est un fermé. En effet  $H_i = \{x \in E, f_i(x) = 0\} = f_i^{-1}(\{0\})$  est un fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue et  $A = \bigcap_{i=1}^r H_i$  est fermé comme intersection de fermés.
3. Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f$  une application polynomiale,  $A^+ = \{x \in E, f(x) \geq 0\} = f^{-1}([0, +\infty[)$  est un fermé comme image réciproque d'un fermé par une application continue et  $A^{++} = \{x \in E, f(x) > 0\} = f^{-1}(]0, +\infty[)$  est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue.

**Exercices :**

1. Retrouver que l'ensemble des matrices stochastiques est fermé.
2. On considère  $A = \text{GL}_n(\mathbf{K})$ . Montrer que  $A$  est ouvert.

## 2.6 Applications uniformément continues

### Définition 12.48

Soit  $f$  une application définie sur une partie  $A$  d'un espace vectoriel normé  $E$  et à valeurs dans  $F$ . On dit que  $f$  est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in A^2, d(x, y) \leq \eta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

Remarques :

1. On peut remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes.
2. En changeant la norme de  $E$  et/ou de  $F$  par une norme équivalente, on ne modifie pas le caractère uniformément continue d'une application.

### Proposition 12.49

Soit  $f$  une application de  $A \subset E$  dans  $F$ .  
Si elle est uniformément continue alors elle est continue.

Démonstration : Il suffit de recopier la démonstration classique. □

### ATTENTION

Ce n'est pas une équivalence. L'application  $x \mapsto x^2$  est continue sur  $\mathbf{R}$  mais pas uniformément continue. En effet, si on suppose par l'absurde qu'elle est uniformément continue. Pour  $\varepsilon = 1$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $|x - y| \leq \eta \Rightarrow |x^2 - y^2| \leq \varepsilon = 1$ . Maintenant en posant  $y = x + \eta$ ,  $|y^2 - x^2| = 2x\eta + \eta^2$  donc, quand  $x \rightarrow \infty$ ,  $|x^2 - y^2| \rightarrow \infty$  ce qui contredit l'hypothèse.

## 2.7 Applications lipschitziennes

Rappelons, ce qui a déjà été vu sur les applications lipschitziennes.

### Définition 12.50 (Applications lipschitziennes)

Soit  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés. Soit  $f$  une application de  $A \subset E$  dans  $F$ .

1. Soit  $k \in \mathbf{R}_+$ . L'application  $f$  est dite  $k$ -lipschitzienne si

$$\forall (x, y) \in A^2, d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

2. L'application  $f$  est dite lipschitzienne s'il existe un réel positif  $k$  tel que  $f$  soit  $k$ -lipschitzienne.

Exemple : L'application norme est 1-lipschitzienne. En effet soit  $E$  un espace vectoriel normé,

$$\forall (x, y) \in E^2, \left| \|x\|_E - \|y\|_E \right| \leq \|x - y\|_E$$

d'après la deuxième inégalité triangulaire.

### Proposition 12.51

Soit  $f$  une application lipschitzienne. Elle est uniformément continue (et donc continue).

**Démonstration :** Si  $f$  est  $k$ -lipschitzienne. Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut prendre dans la définition de l'uniforme continuité  $\eta = \frac{\varepsilon}{k}$ . □

**Exemple :** L'application norme est donc continue.

**ATTENTION**

Là encore, ce n'est pas une équivalence. La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  sur  $[0, 1]$  n'est pas lipschitzienne car

$$\forall x > 0, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

et que  $\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$

Cependant, elle est uniformément continue, en effet pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut prendre  $\eta = \varepsilon^2$  pour obtenir que

$$|x - y| \leq \eta \Rightarrow |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \varepsilon$$

En effet :

- si  $\sqrt{x}$  et  $\sqrt{y}$  sont inférieurs à  $\varepsilon$  c'est vrai
- si  $\sqrt{x}$  ou  $\sqrt{y}$  sont supérieurs à  $\varepsilon$  alors  $\sqrt{x} + \sqrt{y} \geq \varepsilon$  et donc

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon.$$

**Proposition 12.52**

L'ensemble des applications lipschitziennes de  $A \subset E$  dans  $F$  est un espace vectoriel.

Voici un exemple classique (à connaître).

**Définition 12.53** (Distance à une partie)

Soit  $A \subset E$  un ensemble non vide. On appelle distance à  $A$  et on note  $d(\cdot, A)$  l'application

$$\begin{aligned} d(\cdot, A) : E &\mapsto \mathbf{R} \\ x &\mapsto d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) \end{aligned}$$

**Remarque :** La partie  $\{d(x, a) \mid a \in A\}$  est une partie non vide de  $\mathbf{R}_+$ . Elle est donc minorée par 0. De ce fait elle admet une borne inférieure qui peut (ou pas) être atteinte.

**Exemple :** Soit  $A = ]0, 1[$ ,  $d(2, ]0, 1[) = 1$  mais il n'existe pas d'élément  $a$  de  $A$  tel que  $d(2, a) = 1$ .

**Proposition 12.54**

Soit  $A \subset E$  une partie non vide. L'application  $d(\cdot, A)$  est lipschitzienne car

$$\forall (x, y) \in E^2, |d(x, A) - d(y, A)| \leq |x - y|$$

**Démonstration :** Il suffit de voir que pour tout  $a \in A$ ,

$$d(x, a) - d(x, y) \leq d(y, a)$$

En utilisant que  $d(x, A) \leq d(x, a)$  on obtient que

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, a)$$

Ceci étant vrai pour tout  $a$  de  $A$ ,

$$d(x, A) - d(x, y) \leq d(y, A).$$

On a donc  $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$ . Maintenant, par symétrie,

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$$

□

**Exercice :** Montrer que  $\{x \in E \mid d(x, A) = 0\} = \overline{A}$ .

## 2.8 Applications linéaires continues

Nous nous intéresserons la majorité du temps aux applications linéaires. Il y a alors un critère simple pour montrer qu'une application est continue.

### Théorème 12.55

Soit  $f$  une application **linéaire** d'un espace vectoriel normé  $E$  dans un espace vectoriel normé  $F$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) L'application  $f$  est continue.
- ii) L'application  $f$  est continue en 0.
- iii) L'application  $f$  est lipschitzienne
- iv) Il existe  $C \in \mathbf{R}$  telle que

$$\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E$$

**Remarque :** En pratique on utilise quasiment toujours le critère *iv*) pour prouver qu'une application linéaire est (ou n'est pas continue).

**Démonstration :**

- $i) \Rightarrow ii)$  est évidente.
- $iii) \Rightarrow i)$  est déjà vu.
- $iv) \Rightarrow iii)$  a déjà été vu. Rappelons l'argument. On suppose  $iv)$ . Pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,

$$\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x - y)\|_F \leq C\|x - y\|_E.$$

- Montrons  $ii) \Rightarrow iv)$ . On suppose donc que  $f$  est continue en 0. De ce fait pour  $\varepsilon = 1$ , il existe  $\eta$  tel que

$$\forall x \in E, \|x\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x)\|_F \leq 1$$

Maintenant pour tout vecteur  $x$  non nul,

$$x = \lambda y$$

où  $\|y\|_E = \eta$ . Il suffit de prendre  $\lambda = \frac{\|x\|_E}{\eta}$  et  $y = \eta \frac{x}{\|x\|_E}$ . Par linéarité, on en déduit que

$$\|f(x)\|_F = |\lambda| \|f(y)\|_F \leq |\lambda| = C\|x\|_E$$

en posant  $C = \frac{1}{\eta}$ .

□

**Notation :** On note  $\mathcal{L}_c(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ .

**Remarque :** Dans le cas où  $f$  est une application linéaire continue, on a donc

$$\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E.$$

Cela revient à dire que l'ensemble  $\left\{ \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} \mid x \in \setminus \{0\} \right\}$  est majoré par  $C$ . On essaiera souvent de trouver le meilleur majorant à savoir

$$\sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

On le notera  $\|f\|$ .

### Proposition 12.56

Soit  $E, F$  et  $G$  trois espaces vectoriels normés. On note  $\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F$  et  $\|\cdot\|_G$  leur norme et on considère la norme produit pour  $E \times F$ . Soit  $B : E \times F \rightarrow G$  une application bilinéaire. Elle est continue si et seulement si

$$\exists C \in \mathbf{R}, \forall (x, y) \in E \times F, \|B(x, y)\|_G \leq C \|x\|_E \|y\|_F$$

#### Démonstration :

- On suppose la condition. Montrons que  $B$  est continue pour la norme produit  $\|(x, y)\| = \text{Max}(\|x\|, \|y\|)$ . En effet soit  $(\alpha_n)$  une suite tendant vers  $(x, y)$ . On pose  $\alpha_n = (x_n, y_n)$ . On a alors  $(x_n) \rightarrow x$  car  $\|x_n - x\|_E \leq \|\alpha_n - (x, y)\|$ . De même,  $(y_n) \rightarrow y$ . On a alors

$$\begin{aligned} \|B(x_n, y_n) - B(x, y)\| &= \|B(x_n, y_n) - B(x, y_n) + B(x, y_n) - B(x, y)\| \\ &\leq \|B(x_n - x, y_n)\| + \|B(x, y_n - y)\| \\ &\leq C \|x_n - x\|_E K' + C \|y_n - y\|_F \|x\|_E \end{aligned}$$

où  $K'$  est un majorant de  $\|y_n\|_F$  (la suite convergeant elle est bornée). On a bien  $B(x_n, y_n) \rightarrow B(x, y)$  donc, par caractérisation séquentielle,  $B$  est continue.

- On suppose maintenant que  $B$  est continue. En particulier, elle est continue en 0. Donc il existe  $\eta$  tel que  $\|(x, y)\| = \text{Max}(\|x\|, \|y\|) \leq \eta$  implique  $\|B(x, y)\| \leq 1$ . Dès lors pour tout  $(x, y) \in E \times F$  avec  $x \neq 0$  et  $y \neq 0$ ,

$$B(x, y) = \frac{\|x\| \cdot \|y\|}{\eta^2} B\left(\eta \frac{x}{\|x\|}, \eta \frac{y}{\|y\|}\right) \leq \frac{\|x\| \cdot \|y\|}{\eta^2}.$$

□

**Remarque :** Ce résultat se généralise aux applications multilinéaires de manière immédiate.

## 3 Parties compactes d'un espace vectoriel normé

### 3.1 Définition

Certains théorèmes d'analyse ne sont vrais que sur des segments : théorème de Bolzano-Weierstrass, toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Le but de ce chapitre est de généraliser cela à des parties d'un espace vectoriel normé.

#### Définition 12.57

Soit  $A$  une partie d'un espace vectoriel normé  $E$ . On dit que c'est un compact (ou que c'est une partie compacte) si on peut extraire de toute suite de  $A$  une sous-suite **convergente** dans  $A$ .

#### Remarques :

1. Il est important que la limite de la suite soit dans  $A$ .
2. Cette définition s'appelle *propriété de Bolzano-Weierstrass*. Il existe une autre définition *propriété de Borel-Lebesgue* qui n'est pas au programme.
3. On peut aussi dire : « toute suite a une valeur d'adhérence ».
4. La définition de compact est *absolue*. Il n'y a pas de notion de compact relatif à  $X$ .

#### Exemples :

1. Dans  $\mathbf{R}$ , les segments  $[a, b]$  sont des compacts. En effet si  $(u_n)$  est une suite à valeurs dans  $[a, b]$  elle est bornée donc, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une sous-suite  $(u_{\varphi(n)})$  convergente de  $(u_n)$ . De plus, comme  $\forall n \in \mathbf{N}, a \leq u_n \leq b$  alors c'est encore vrai pour  $(u_{\varphi(n)})$  et donc la limite de la suite extraite est bien dans  $[a, b]$ .
2. Les segments ne sont pas les seuls compacts. Il y a aussi  $\emptyset$  ou une union d'un nombre fini de segments

#### Exercices :

1. Montrer qu'une intersection de parties compactes est compacte
2. Montrer qu'une réunion finie de parties compactes est compacte. Est-ce vrai pour une réunion infinie ?

3. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est compacte.

**Proposition 12.58**

La caractère compact ne change pas si on remplace la norme de  $E$  par une norme équivalente.

**Démonstration :** Il suffit de voir que l'on ne modifie pas la convergence des suites. □

**Proposition 12.59**

Soit  $A$  une partie compacte de  $E$ . Elle est fermée et bornée.

**Démonstration :**

- On commence par montrer que  $A$  est fermée. On utilise la caractérisation séquentielle. Il suffit donc de montrer que toute suite de  $A$  convergente (dans  $E$ ) converge dans  $A$ . En effet soit  $(u_n)$  une suite convergente vers  $\ell \in E$ . D'après la définition, il existe une suite extraite qui converge dans  $A$ . Maintenant, on sait qu'une suite extraite d'une suite convergente converge vers la limite de la suite initiale donc  $\ell \in A$ .
- Montrons maintenant que  $A$  est bornée. On procède par l'absurde. Si  $A$  n'est pas bornée, alors elle n'est inclus dans aucune boule, en particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in A, \|x_n - 0\| \geq n.$$

On en déduit que toute suite extraite de la suite  $(x_n)$  n'est pas bornée donc pas convergente. □

**ATTENTION**

Dans le cas général ce n'est pas une équivalence. Pour  $E = \mathbb{K}[X]$  avec la norme infinie. La boule unité fermée  $\bar{B}(0, 1)$  est bornée et fermée. Mais elle n'est pas compacte. En effet, si on pose  $u_n = X^n$ , on ne peut pas extraire une sous-suite convergente car  $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, n \neq m \Rightarrow d(X^n, X^m) = 1$ . Cette propriété reste vraie pour toute suite extraite.

**Proposition 12.60**

Soit  $A$  une partie compacte de  $E$ . Une partie  $B$  de  $A$  est compacte si et seulement si elle est fermée (dans  $A$ ).

**Démonstration :**

- $\Rightarrow$  On suppose que  $B$  est compacte. Elle est donc fermée (dans  $E$ ) et donc fermé dans  $A$ .
- $\Leftarrow$  On suppose que  $B$  est un fermé relatif de  $A$ . Toute suite  $(u_n)$  d'éléments de  $B$  est une suite d'éléments de  $A$ . En particulier, on peut en extraire une sous-suite  $(u_{\varphi(n)})$  qui converge (dans  $A$ ). Maintenant, comme  $B$  est un fermé relatif, la suite  $(u_{\varphi(n)})$  qui est une suite d'éléments de  $B$  qui converge dans  $A$  a sa limite dans  $B$ . On a bien montré que  $B$  était compacte. □

**Proposition 12.61**

Soit  $A$  une partie compacte de  $E$  et  $(u_n)$  une suite de  $A$ . Elle est convergente si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

**Démonstration :**

- $\Rightarrow$  Déjà vu. Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence : sa limite.



- $\Leftarrow$  Procédons par contraposée. Montrons que si  $(u_n)$  ne converge pas alors elle a plusieurs valeurs d'adhérence (car elle ne peut pas en avoir aucune; par définition toute suite dans un compact a au moins une valeur d'adhérence). Notons  $\ell_1$  une valeur d'adhérence de  $(u_n)$  (qui existe car  $A$  est compacte). Maintenant comme  $(u_n)$  ne converge pas, il existe  $\varepsilon$  tel que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n \geq N$  et  $u_n \notin B(\ell_1, \varepsilon)$ . On peut donc ainsi construire une suite extraite  $(u_{\varphi(n)})$  telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{\varphi(n)} \notin B(\ell_1, \varepsilon).$$

Maintenant, cette suite extraite a nécessairement une valeur d'adhérence  $\ell_2$  qui ne peut pas être  $\ell_1$ . Au final,  $(u_n)$  a bien au moins deux valeurs d'adhérence. □

### Proposition 12.62

Soit  $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_p, \|\cdot\|_p)$  des espaces vectoriels normés. On se donne pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$  une partie  $A_i$  compacte de  $E_i$ . Alors  $A_1 \times \dots \times A_p$  est une partie compacte de  $E_1 \times \dots \times E_p$  muni de la norme produit.

**Démonstration :** Soit  $(u_n)$  une suite à valeur dans  $\prod_{i=1}^p A_i$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , notons  $u_n = (u_n(1), \dots, u_n(p))$ . On peut considérer une extractrice  $\varphi_1$  telle que  $(u_{\varphi_1(n)}(1))$  converge vers  $\ell_1$  car  $(u_n(1))$  est une suite à valeurs dans  $A_1$  qui est compact. Maintenant, on peut extraire de  $(u_{\varphi_1(n)}(2))$  une suite  $(u_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}(2))$  qui converge vers  $\ell_2$ . Notons que  $(u_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}(1))$  converge encore vers  $\ell_1$  comme suite extraite d'une suite convergente.

En continuant ainsi on peut construire des extractrices  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  telles que, en posant  $\varphi = \varphi_p \circ \dots \circ \varphi_1$  on ait que pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $(u_{\varphi(n)}(i))$  converge vers  $\ell_i$ .

De par la définition de la norme produit, la suite  $(u_{\varphi(n)})$  converge vers  $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ . □

## 3.2 Applications continues sur une partie compacte

On a défini les parties compactes comme celles qui vérifient la propriété de Bolzano-Weierstrass. On voulait aussi généraliser le fait qu'une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

### Théorème 12.63

Soit  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels normés. Soit  $A$  une partie de  $E$  et  $f$  une application continue de  $A$  dans  $F$ . Soit  $B$  une partie compacte de  $A$  alors  $f(B)$  est compacte.

**Remarque :** On dit « l'image d'un compact par une application continue est compact »

**Démonstration :** Soit  $(y_n)$  une suite de  $f(B)$ . Par définition, il existe une suite  $(x_n)$  de  $B$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, y_n = f(x_n)$ . Il suffit en effet de « choisir » un antécédent par chaque  $y_n$ . Maintenant, comme  $(x_n)$  est une suite de  $B$  qui est compact, il existe une extractrice  $\varphi$  telle que  $(x_{\varphi(n)})$  converge. Notons  $\ell$  sa limite. Comme  $f$  est continue  $(y_{\varphi(n)})$  converge vers  $f(\ell)$ . Cela prouve bien que  $f(B)$  est compacte. □

### ATTENTION

Ne pas confondre le fait que l'image directe d'un compact par une application continue est compact avec le fait que l'image réciproque d'un fermé / ouvert par une application continue est fermé / ouvert.

Nous pouvons alors retrouver le théorème vu en première année.

### Corollaire 12.64 (Théorème des bornes atteintes)

Soit  $f$  une application continue de  $A \subset E$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $A$  est compact et non vide alors  $f(A)$  est bornée et les bornes sont atteintes.

**Démonstration :** On sait que  $f(A)$  est un compact de  $\mathbf{R}$ . Il est donc borné et fermé. On peut donc poser  $M = \sup f(A)$  sa borne supérieure. Par définition, on peut trouver une suite  $(\alpha_n)$  d'éléments de  $f(A)$  qui tendent vers  $M$  car pour tout  $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$  il existe  $\alpha_n \in f(A)$  tel que  $M - \varepsilon \leq \alpha_n \leq M$ . Mais comme  $f(A)$  est fermé,  $M = \lim(\alpha_n)$  appartient à  $f(A)$ .

On peut faire de même pour la borne inférieure. □

**Remarque :** Quand on considère une application d'une partie compacte  $A$  et une application continue  $f$  de  $A$  dans un espace vectoriel normé  $(F, \|\cdot\|_F)$  on peut appliquer ce théorème à

$$\begin{aligned} \|f\|_F : A &\rightarrow \mathbf{R} \\ x &\mapsto \|f(x)\|_F \end{aligned}$$

En effet  $\|f\|_F$  est continue en tant que composée de deux applications continues.

**Exercice :** Soit  $K$  une partie compacte. Montrer que pour tout élément  $x$  de  $E$ , il existe un élément  $\alpha \in K$  tel que  $d(x, K) = \|x - \alpha\|$ .

**Exemple :** C'est une des étapes qui permet de démontrer le théorème de D'Alembert-Gauss : Supposons par l'absurde qu'il existe un polynôme  $P \in \mathbf{C}[X]$  non constant qui ne s'annule pas. On considère alors

$$\begin{aligned} f : \mathbf{C} &\rightarrow \mathbf{R} \\ z &\mapsto \frac{1}{|P(z)|} \end{aligned}$$

Il est clair que si  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0$ . En effet  $|P(z)| \sim |a_d||z|^d$  où  $d$  est de degré de  $P$ .

Cela signifie que si on considère  $z_0 \in \mathbf{C}$ , il existe  $R \in \mathbf{R}_+$  tel que

$$\forall z \in \mathbf{C}, |z| > R \Rightarrow f(z) \leq f(z_0)$$

On en déduit que pour chercher le maximum de la fonction on peut se restreindre au compact  $\overline{B}(0, R)$ .

Finalement, la fonction  $f$  est majorée et atteint son maximum. Il existe donc un nombre complexe  $\alpha$  tel que

$$\forall z \in \mathbf{C}, f(z) \leq f(\alpha)$$

C'est-à-dire

$$\forall z \in \mathbf{C}, |P(z)| \geq |P(\alpha)|.$$

Il ne reste plus qu'à trouver la contradiction...

On peut aussi reformuler le théorème de Heine

**Théorème 12.65** (Théorème de Heine)

Soit  $A$  une partie compacte de  $E$ . Toute application continue  $f$  de  $A$  dans  $F$  est uniformément continue.

**Démonstration :** Il suffit de recopier la démonstration du cours de première année. On suppose par l'absurde qu'il existe une fonction  $f$  de  $A$  dans  $F$  qui soit continue mais pas uniformément continue. De ce fait, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $(x, y) \in A^2$  tels que  $d(x, y) \leq \eta$  et  $d(f(x), f(y)) > \varepsilon$ . En particulier en prenant  $\eta = \frac{1}{n+1}$  on peut construire deux suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  telles que

$$\forall n \in \mathbf{N}, d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n+1} \text{ et } d(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon.$$

On peut alors réaliser une double extraction avec de construire  $\varphi$  telle que  $(x_{\varphi(n)})$  et  $(y_{\varphi(n)})$  convergent. En notant  $\ell_x$  et  $\ell_y$  les limites et passant à la limite dans

$$d(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \leq \frac{1}{\varphi(n)+1}$$

on obtient que  $\ell_x = \ell_y$ . En utilisant alors la continuité de  $f$  on obtient que  $(f(x_{\varphi(n)}))$  et  $(f(y_{\varphi(n)}))$  convergent toutes les deux vers  $f(\ell_x) = f(\ell_y)$ . Ce qui est absurde car  $\forall n \in \mathbf{N}, d(f(x_{\varphi(n)}), f(y_{\varphi(n)})) > \varepsilon$ . □

**Exemple :** On a montré précédemment que  $x \mapsto \sqrt{x}$  était uniformément continue sur  $[0, 1]$ . Cela découle directement de ce théorème.

**Exercice :** Montrer que  $x \mapsto \sqrt{x}$  est uniformément continue sur  $\mathbf{R}_+$ .

## 4 Espaces vectoriels de dimension finie

Nous allons étudier plus particulièrement les notions topologiques étudiées précédemment dans le cas des espaces vectoriels de dimension finie.

## 4.1 Equivalence des normes

Commençons par un lemme

### Lemme 12.66

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , on note  $\|\cdot\|_\infty$  la norme infinie relative à cette base. La boule unité fermée  $\overline{B}_\infty(0, 1)$  est compacte pour la norme  $\|\cdot\|_\infty$ .

**Démonstration :** Notons  $D$  la boule unité fermée de  $\mathbf{K}$ , c'est-à-dire que  $D = [-1, 1]$  si  $\mathbf{K} = \mathbf{R}$  et  $D = \{z \in \mathbf{C}, |z| \leq 1\}$  si  $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ .

Regardons la boule unité fermée

$$\overline{B}_\infty(0, 1) = \{x \in E \mid \|x\|_\infty \leq 1\} = \{\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in D^n\}.$$

On considère l'application

$$\begin{aligned} \Phi : (\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty) &\rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty) \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \end{aligned}$$

C'est une application linéaire continue (car elle est 1-lipschitzienne) et  $\overline{B}_\infty(0, 1) = \Phi(D^n)$ .

On sait que  $D$  est un compact de  $\mathbf{K}$  et donc  $D^n$  est un compact comme produit fini de compact.

On en déduit que  $\overline{B}_\infty(0, 1) = \Phi(D^n)$  est compact comme image d'un compact par une application continue.  $\square$

### Théorème 12.67

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les normes sur  $E$  sont équivalentes.

**Démonstration :** (Non exigible) On se fixe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et on note encore  $\|\cdot\|_\infty$  la norme infinie associée à cette base.

On considère une norme  $\|\cdot\|$  sur  $E$ . On va montrer quelle est équivalente à  $\|\cdot\|_\infty$ . Par transitivité on aura alors obtenu que toutes les normes sont équivalentes.

Commençons par montrer que  $\|\cdot\| : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  est continue<sup>2</sup>.

Pour tout  $x \in E$ , on le décompose en  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et on a

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\| \leq nC \|x\|_\infty$$

où  $C = \max(\|e_1\|, \dots, \|e_n\|)$ .

Pour  $(x, y)$  dans  $E$  on a donc

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \leq nC \|x - y\|_\infty$$

ce qui prouve bien que  $\|\cdot\| : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  est 1-lipschitzienne donc continue.

De plus, pour  $\|\cdot\|_\infty$ , la sphère unité  $S_\infty(0, 1) \subset \overline{B}_\infty(0, 1)$  est un fermé d'une partie compacte (d'après le lemme précédent) c'est donc aussi un compact.

On en déduit que  $\|\cdot\|$  est bornée et atteint ses bornes sur  $S_\infty(0, 1)$ . Il existe donc  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\forall x \in S_\infty(0, 1), \beta \leq \|x\| \leq \alpha.$$

Notons que comme la valeur minimale est atteinte et que  $0 \notin S_\infty(0, 1)$ ,  $\beta > 0$ . Maintenant pour tout  $x \in E$  avec  $x \neq 0$ ,

$\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S_\infty(0, 1)$  et donc

$$\beta \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \leq \alpha \Rightarrow \beta \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \alpha \|x\|_\infty.$$

Les normes sont bien équivalentes car

$$\forall x \in E, \|x\| \leq \alpha \|x\|_\infty \text{ et } \|x\|_\infty \leq \frac{1}{\beta} \|x\|.$$

<sup>2</sup> Faire attention que ce n'est pas évident; il est évident que  $\|\cdot\| : (E, \|\cdot\|) \rightarrow \mathbf{R}$  mais ce n'est plus le cas quand la norme de l'espace de départ n'est plus  $\|\cdot\|$ .

□

**Remarque :** Dans le cas de l'étude topologique d'un espace vectoriel de dimension finie, il n'est pas nécessaire de préciser la norme utilisée. En effet en modifiant une norme pas une autre qui lui sera équivalente on ne modifie pas :

- La convergence des suites
- Le caractère ouvert et donc l'intérieur
- Le caractère fermé et donc l'adhérence
- Le caractère compact
- La continuité des fonctions.

## 4.2 Topologie des espaces vectoriels de dimension finie

Nous allons voir certaines propriétés topologiques qui ne sont vraies que pour les espaces vectoriels de dimension finie. Dans tout ce paragraphe,  $E$  est un espace vectoriel normé de dimension finie. On note  $\|\cdot\|$  sa norme.

### Proposition 12.68

Une partie  $A$  de  $E$  est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

**Démonstration :** On a déjà vu que les parties compactes étaient fermées et bornées. Montrons l'implication inverse.

Soit  $A$  une partie bornée. Il existe donc  $R > 0$  tel que  $A \subset \overline{B}(0, R)$ . On a vu que la boule unité fermée était compacte pour une norme infinie. La même preuve montre que  $\overline{B}_\infty(0, R)$  est aussi compacte. C'est donc aussi vrai pour la norme  $\|\cdot\|$ .

On en déduit que  $A$  est un fermé d'un compact. C'est donc bien un compact. □

**Exemple :** Les boules fermées et les sphères sont compactes. Rappelons que ce résultat n'est plus vrai en dimension infinie.

### Corollaire 12.69

Soit  $(u_n)$  une suite de  $E$  bornée.

1. Elle admet une sous-suite convergente.
2. Elle converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

**Démonstration :** Il suffit d'utiliser que  $(u_n)$  est une suite à valeurs dans le compact  $\overline{B}(0, R)$  où  $\forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leq R$ . □

Rappel Les sous-espaces vectoriels sont des fermés (mais ce ne sont pas des compacts sauf s'ils sont réduits à  $\{0\}$ ).

**Exemple :** L'ensemble des matrices de trace nulle est fermé.

## 4.3 Applications continues

### Théorème 12.70

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Si  $E$  est de dimension finie alors  $f$  est continue.

### ATTENTION

Cela n'est vrai que si  $f$  est linéaire.

**Démonstration :** On considère encore la norme infinie associée à une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ . En effet, si on note  $C = \max_{1 \leq i \leq n} \|f(e_i)\|_F$  alors pour tout  $x = \sum \lambda_i e_i$  de  $E$

$$\|f(x)\|_F \leq \sum_{i=1}^n \|\lambda_i f(e_i)\|_F \leq nC \|x\|_\infty.$$

L'application  $f$  est donc continue. □

**Exemples :**

1. Dans  $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . Pour toute matrice  $P \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ , l'application  $\Phi : M \mapsto P^{-1}MP$  est linéaire donc continue. On en déduit que si  $(A_n) \rightarrow A$  alors si on pose  $B_n = P^{-1}A_nP$ , la suite  $(B_n)$  converge vers  $P^{-1}AP$ .
  2. On peut retrouver que les sous-espaces vectoriels sont fermés. En effet, soit  $F$  un sous-espace vectoriel et  $G$  un supplémentaire. On considère la projection  $\pi$  sur  $G$  parallèlement à  $F$ . C'est une application linéaire qui est donc continue. Maintenant  $F = \ker \pi = \pi^{-1}(\{0\})$  est donc l'image réciproque d'un fermé. C'est donc un fermé.
  3. On retrouve que les projections  $e_i^*$  sont continues.
- Regardons le cas des applications multilinéaires.

**Définition 12.71**

Soit  $E_1, \dots, E_p$  des espaces vectoriels normés de dimension finie. On appelle application multilinéaire une application  $\Phi$  de  $\prod_{i=1}^n E_i$  dans  $F$  telle que pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  et tout  $x_1 \in E_1, \dots, x_{i-1} \in E_{i-1}, x_{i+1} \in E_{i+1}, \dots, x_n \in E_n$  l'application

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, \dots, x_{i-1}, \bullet, x_{i+1}, x_n) : E_i &\rightarrow F \\ x &\mapsto \Phi(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, x_n) \end{aligned}$$

est linéaire.

**Exemples :**

1. Pour  $E_1 = E_2 = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  on a le produit  $\Phi(A, B) = AB$
2. Soit  $E$  un espace préhilbertien réel, le produit scalaire  $(\bullet, \bullet) : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$  est bilinéaire.
3. Soit  $E$  de dimension  $n$ , le déterminant est  $n$ -linéaire.

**Proposition 12.72**

Soit  $\Phi$  est un application multilinéaire, il existe une constante  $C$  telle que

$$\forall (x_1, \dots, x_n), \|\Phi(x_1, \dots, x_n)\| \leq C \prod_{i=1}^n \|x_i\|.$$

En particulier,  $\Phi$  est continue.

**Démonstration :** La démonstration est similaire à la précédente. Traitons le cas des applications bilinéaires. On se donne  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $(f_1, \dots, f_p)$  des bases de  $E_1$  et de  $E_2$ . On sait alors que pour tout  $(x, y) \in E_1 \times E_2$  on a

$$\Phi(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p \lambda_i \mu_j \Phi(e_i, f_j)$$

où  $\lambda_i = e_i^*(x)$  et  $\mu_j = f_j^*(y)$ . En particulier, si on note  $C = \text{Max}_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \|\Phi(e_i, f_j)\|_F$  alors

$$\Phi(x, y) \leq npC \|x\| \|y\| = K \|x\| \|y\|.$$

Le résultat découle alors de la caractérisation de la continuité des applications multilinéaires. □

**Exemples :**

1. Les exemples précédents.
2. L'application d'évaluation

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E, F) \times E &\rightarrow F \\ (u, x) &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

est continue

3. Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ ,  $\det_{\mathcal{B}} : E^n \rightarrow \mathbf{K}$  est continue car multilinéaire.

## 5 Séries à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie

### 5.1 Généralités

#### Définition 12.73

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Soit  $(\sum u_n)$  une série d'éléments de  $E$ .

1. On dit que la série converge si la suite des sommes partielles converge.
2. On dit que la série converge absolument si la série numérique  $(\sum \|u_n\|)$  converge.

**Remarque :** Toutes les normes étant équivalente, l'absolue convergence ne dépend pas de la norme choisie.

#### Théorème 12.74

Soit  $(\sum u_n)$  une série d'éléments de  $E$  absolument convergente. Elle converge.

**Démonstration :** On considère une série  $(\sum u_n)$  absolument convergente. On se fixe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$  de  $E$ . En particulier, la série  $\sum \|u_n\|_\infty$  est convergente. Comme pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$  et tout  $n$ ,  $|e_i^*(u_n)| \leq \|u_n\|_\infty$  les séries  $\sum e_i^*(u_n)$  sont absolument convergentes donc convergentes. Si on note  $(S_n)$  la suite des sommes partielles, on vient d'établir que pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $e_i^*(S_n) = \sum_{k=0}^n e_i^*(u_k)$  converge donc  $(S_n)$  converge.  $\square$

#### ATTENTION

Ce théorème n'est pas vrai (en général) dans un espace vectoriel normé de dimension infinie. Par exemple pour  $E = \mathbf{K}[X]$  avec la norme infinie  $\|\cdot\|_\infty$ . On pose pour tout entier  $n$  non nul  $P_n = \frac{1}{n^2}X^n$ . Il est clair que  $\|P_n\|_\infty = \frac{1}{n^2}$  et donc la série  $\sum_{n \geq 0} \|P_n\|_\infty$  converge.

Par contre la série  $\sum_{n \geq 0} P_n$  diverge. En effet, supposons par l'absurde qu'elle convergeait et notons  $Q$  la somme de la série et  $d = \deg(Q)$ . Pour tout entier  $N > d$ ,

$$e_{d+1}^* \left( \sum_{n=1}^N P_n - Q \right) = e_{d+1}^*(P_{d+1})$$

On en déduit que

$$\left\| \sum_{n=1}^N P_n - Q \right\|_\infty \geq \frac{1}{(d+1)^2}$$

On a bien une absurdité.

### 5.2 Série géométrique de matrices

On se place dans  $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ . On veut étudier les séries géométriques. On veut donc pouvoir « estimer »  $\|A^p\|$

#### Lemme 12.75

Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $E$ , il existe  $C$  tel que

$$\forall (A, B) \in E^2, \|AB\| \leq C \|A\| \|B\|.$$

**Remarque :** Cela signifie que sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  toutes les normes sont des normes d'algèbres.

**Démonstration :** On sait que pour la norme infinie,

$$\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$$

Maintenant, comme  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sont équivalentes, il existe  $\alpha$  et  $\beta$  tels que

$$\forall A \in E, \|A\| \leq \alpha \|A\|_\infty \text{ et } \|A\|_\infty \leq \beta \|A\|$$

On en déduit que

$$\forall (A, B) \in E^2, \|AB\| \leq \alpha \|AB\|_\infty \leq \alpha n \|A\|_\infty \|B\|_\infty \leq \alpha \beta^2 n \|A\| \|B\|$$

Il suffit de poser  $C = n\alpha\beta^2$ .

Note : On peut aussi remarquer que  $(A, B) \mapsto AB$  est une application bilinéaire sur un espace vectoriel de dimension finie.

□

**Exercice :** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , on pose

$$\| \|A\| \| = \sup_{x \in \mathbf{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Vérifier que  $A \mapsto \| \|A\| \|$  est une norme et que  $\| \|AB\| \| \leq \| \|A\| \| \cdot \| \|B\| \|$ .

Dans toute la suite on notera  $C$  une constante réelle telle que

$$\forall (A, B) \in E^2, \|AB\| \leq C \|A\| \|B\|.$$

### Proposition 12.76

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , si  $\|A\| < \frac{1}{C}$  alors la série géométrique  $(\sum A^p)$  converge absolument. De plus sa somme vaut

$$\sum_{p=0}^{+\infty} A^p = (I_n - A)^{-1}$$

**Démonstration :** Pour la convergence, on voit que

$$\|A^p\| \leq C \|A^{p-1}\| \|A\| \leq C^2 \|A^{p-2}\| \|A\|^2 \leq \dots \leq C^{p-1} \|A\| \|A\|^{p-1} = C^{p-1} \|A\|^p$$

Or  $C^{p-1} \|A\|^p = \frac{1}{C} (C \|A\|)^p$  donc si  $\|A\| < \frac{1}{C}$  alors la série  $(\sum \frac{1}{C} (C \|A\|)^p)$  converge et la série  $(\sum A^p)$  converge absolument.

Pour la somme, Il suffit de remarquer que

$$(I_n - A) \sum_{p=0}^{+\infty} A^p = \sum_{p=0}^{+\infty} A^p - \sum_{p=0}^{+\infty} A^{p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} A^p - \sum_{p=1}^{+\infty} A^p = I_n.$$

□

**Remarques :**

1. On montre ainsi que si  $A$  a une norme « petite » alors  $I_n - A$  est inversible. Ce n'est qu'une condition suffisante, on peut par exemple trouver des matrices nilpotentes de très grande norme et on a encore  $I_n - N$  inversible d'inverse  $\sum_{p=0}^{+\infty} N^p$  qui converge car la suite stationne à 0.
2. On en déduit qu'il existe une boule ouverte centrée en  $I_n$  inclus dans l'ensemble des matrices inversibles :

$$B(I_n, \delta) \subset \text{GL}_n(\mathbf{K}).$$

On peut retrouver que  $\text{GL}_N(\mathbf{K})$  est ouvert. En effet soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ , et soit  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ,

$$A + H = A(I_n - (-A^{-1}H))$$

Si on prend  $H$  tel que  $\|H\| < \frac{1}{C^2 \|A^{-1}\|}$  alors

$$\|A^{-1}H\| \leq C \|A^{-1}\| \|H\| < \frac{1}{C}$$

En particulier,  $I_n - (-A^{-1}H)$  est inversible et donc  $A + H$  aussi. Finalement  $B(A, \eta) \subset \text{GL}_n(\mathbf{K})$  où  $\eta = \frac{1}{C^2 \|A^{-1}\|}$

3. On peut aussi considérer la série  $(\sum u^p)$  pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

### 5.3 Série exponentielle de matrices

Regardons maintenant la série exponentielle  $\left(\sum \frac{A^p}{p!}\right)$ .

#### Proposition 12.77

Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  la série exponentielle est absolument convergente. On note  $\exp(A)$  sa somme.

**Démonstration :** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ , on a vu que pour tout entier  $p$ ,  $\|A\|^p \leq C^{p-1} \|A\|^p$ , comme la série  $\left(\sum \frac{1}{C} \frac{(C\|A\|)^p}{p!}\right)$  converge, la série exponentielle est absolument convergente donc convergente.  $\square$

**Remarque :** De même pour  $u \in \mathcal{L}(E)$  on peut définir  $\exp(u)$ .

#### Proposition 12.78

Soit  $A$  et  $B$  deux matrices telles que  $AB = BA$  alors

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

**Démonstration :** (Non exigible)

– Première preuve :

Le résultat découle des résultats sur les produits de Cauchy en les étendant au cas des espaces vectoriels normés de dimension finie. En effet si on pose  $u_p = \frac{A^p}{p!}$  et  $v_q = \frac{B^q}{q!}$  alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, n! w_n = n! \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} A^p B^{n-p} = (A + B)^n$$

La dernière égalité découle du fait que  $A$  et  $B$  commutent.

Comme on sait que  $\left(\sum u_p\right)$  et  $\left(\sum v_q\right)$  sont absolument convergentes alors  $\left(\sum w_n\right)$  aussi et

$$\exp(A + B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A + B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right) = \exp(A) \exp(B)$$

– Deuxième preuve : On pose  $u_p = \frac{A^p}{p!}$ ,  $v_q = \frac{B^q}{q!}$  et  $w_n = n! \sum_{p+q=n} u_p v_q = (A + B)^n$ .

Pour tout  $N \in \mathbf{N}$ ,  $\sum_{n=0}^N \frac{\|w_n\|}{n!} = \sum_{n=0}^N \left\| \sum_{p+q=n} u_p v_q \right\| \leq \sum_{n=0}^N \sum_{p+q=n} C \|u_p\| \|v_q\|$ . Comme tous les termes sont positifs, la somme sur le « triangle  $p + q \leq N$  » est inférieure à la somme sur « le carré  $(p, q) \in \llbracket 0; N \rrbracket^2$  » :

$$\sum_{n=0}^N \|w_n\| \leq C \sum_{p=0}^N \sum_{q=0}^N \|u_p\| \|v_q\| = C \left(\sum_{p=0}^N \|u_p\|\right) \left(\sum_{q=0}^N \|v_q\|\right) \leq C \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \|u_p\|\right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} \|v_q\|\right).$$

On en déduit que la série  $\left(\sum w_n\right)$  est absolument convergente.

Maintenant, si on calcule

$$\sum_{n=0}^{2N} w_n = \sum_{n=0}^{2N} \sum_{p+q=n} u_p v_q.$$

On fait la somme sur le « triangle  $p + q \leq 2N$  qui contient le « le carré  $(p, q) \in \llbracket 0; N \rrbracket^2$  » et deux autres morceaux. Précisément,

$$\sum_{n=0}^{2N} w_n = \left(\sum_{p=0}^N u_p\right) \left(\sum_{q=0}^N u_q\right) + \sum_{(p,q) \in T_N} u_p v_q$$

faire un dessin



Maintenant,

$$\left\| \sum_{(p,q) \in T_N} u_p v_q \right\| \leq C \sum_{(p,q) \in T_N} \|u_p\| \|v_q\| \leq \left( \sum_{p=N+1}^{+\infty} \|u_p\| \right) \left( \sum_{q=0}^{+\infty} \|v_q\| \right) + \left( \sum_{p=0}^{+\infty} \|u_p\| \right) \left( \sum_{q=N+1}^{+\infty} \|v_q\| \right).$$

On en déduit que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{(p,q) \in T_N} u_p v_q = 0$  et donc

$$\exp(A+B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(A+B)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_p \right) \left( \sum_{q=0}^{+\infty} v_q \right) = \exp(A) \exp(B)$$

□

### ATTENTION

En particulier, on voit que  $I_n = \exp(0) = \exp(A - A) = \exp(A) \exp(-A)$  donc  $\exp(A)$  est inversible et  $\exp(-A) = \exp(A)^{-1}$ .

Nous verrons lors du chapitre sur les équations différentielles l'intérêt de l'exponentielle de matrice. Voyons déjà quelques méthodes de calculs.

1. Si  $A$  est une matrice diagonale  $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ . On a alors

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$  et  $P \in \text{GL}_n(\mathbf{K})$ . On pose  $B = P^{-1}AP$ . On a donc que pour tout  $p \in \mathbf{N}$ ,  $B^p = P^{-1}A^pP$  et donc

$$\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{p=0}^n \frac{B^p}{p!} = P^{-1} \left( \sum_{p=0}^n \frac{A^p}{p!} \right) P.$$

On sait que le produit matriciel est continu donc

$$\exp(B) = P^{-1} \exp(A) P.$$

Dit autrement, pour calculer l'exponentielle d'une matrice on peut la « remplacer » par une matrice semblable puis faire le changement de bases.

**Exercice** : Calculer  $\exp(A)$  pour  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ . On peut exprimer  $A$  en fonction de  $I$  et de  $M =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. De même si  $A$  est diagonale par blocs...

4. Dans le cas où  $A$  est annulé par un polynôme scindé (toujours vrai sur  $\mathbf{C}$ ) on sait qu'elle est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont de la forme  $\lambda I_p + N$  où  $N$  est nilpotente. D'après ce qui précède, on peut donc se ramener à calculer  $\exp(\lambda I_p + N)$ . De plus  $\lambda I_p$  et  $N$  commutent on a donc

$$\exp(\lambda I_p + N) = \exp(\lambda) \exp(N).$$

Or le calcul de  $\exp(N)$  est aisé car  $N^k$  est stationnaire à 0.

5. Dans le cas où  $A$  est diagonalisable. Plutôt que de faire le changement de bases qui nécessite de calculer  $P^{-1}$ , on peut utiliser les polynômes interpolateurs de Lagrange. Précisément, on note  $\pi_A = \prod_{i=1}^d (X - a_i)$  le polynôme minimal

et, pour tout  $j \in \llbracket 1; d \rrbracket$ ,  $R_j = \frac{\prod_{i \neq j} (X - a_i)}{\prod_{i \neq j} (a_j - a_i)}$ . On sait alors que pour tout entier  $n$ ,

$$X^n = Q\pi_A + S$$

où

$$S = \sum_{j=1}^d a_j^n R_j$$

Dès lors,

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^d a_j^n R_j(A) = \sum_{j=1}^d \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a_j^n \right) R_j(A) = \sum_{j=1}^d \exp(a_j) R_j(A)$$

**Exercices :**

1. Montrer que pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  il existe  $P \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $\exp(A) = P(A)$ . On pourra utiliser que  $\mathbb{C}[A]$  est un sous-espace vectoriel fermé.
2. Montrer que pour  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $\det(\exp(M)) = \exp(\text{tr}(M))$ . On pourra trigonaliser  $M$ .

## 6 Parties connexes par arcs

On veut maintenant généraliser le théorème des valeurs intermédiaires.

### 6.1 Motivation

Le théorème des valeurs intermédiaires n'est plus vérifié dans  $\mathbb{C}$  par exemple. Pour  $f : t \mapsto e^{it}$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$ . On a  $1 \in f(\mathbb{R})$ ,  $-1 \in f(\mathbb{R})$  mais le segment  $[-1, 1]$  n'est pas inclus dans  $f(\mathbb{R})$ .

### 6.2 Définition

#### Définition 12.79

Soit  $E$  un espace vectoriel normé,  $A$  une partie de  $E$ .

1. On appelle chemin dans  $A$  (ou arc dans  $A$ ) une application continue  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ .
2. Soit  $x$  et  $y$  dans  $A$ . On appelle chemin dans  $A$  de  $x$  vers  $y$  un chemin  $\gamma$  tel que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(1) = y$ .

**Remarque :** Il faut imaginer l'arc (ou le chemin) comme l'image  $\gamma([0, 1])$  de l'application.

#### Proposition 12.80

Soit  $A$  une partie de  $E$ . On construit une relation binaire sur  $A$  en posant

$$\forall x \in A^2, x \mathcal{R} y \iff (\text{il existe un chemin dans } A \text{ de } x \text{ vers } y)$$

C'est une relation d'équivalence.

**Démonstration :**

- La relation est réflexive. En effet, pour tout  $x \in A$ , il existe un chemin reliant  $x$  à lui-même. Il suffit de prendre la fonction constante égale à  $x$ .
- La relation est symétrique. En effet si pour  $x, y$  dans  $A$  on suppose que  $x \mathcal{R} y$ . Il existe donc un chemin  $\gamma$  allant de  $x$  à  $y$ . Il suffit de considérer  $\tilde{\gamma}$  défini par

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : [0, 1] &\rightarrow A \\ t &\mapsto \gamma(1-t) \end{aligned}$$

C'est bien une application continue et  $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(1) = y$ ,  $\tilde{\gamma}(1) = \gamma(0) = x$ .

- La relation est transitive. Soit  $x, y$  et  $z$  dans  $A$ . On suppose que  $x \mathcal{R} y$  et que  $y \mathcal{R} z$ . Il existe donc  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  des chemins de  $x$  vers  $y$  et de  $y$  vers  $z$ . On va construire un chemin de  $x$  en  $z$  en mettant les deux chemins bout à bout. Précisément, on pose

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow A$$

$$t \mapsto \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } t < \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie bien que  $\gamma$  est continu car  $\gamma_1(1) = \gamma_2(0) = y$  puis que  $\gamma(0) = \gamma_1(0) = x, \gamma(1) = \gamma_2(1) = z$ .

Faire un dessin

La relation  $\mathcal{R}$  est bien une relation d'équivalence. □

**Remarque :** On va alors regarder les classes d'équivalences de pour cette relation.

#### Définition 12.81

Une partie  $A$  est dite connexe par arcs si pour tout  $x$  et  $y$  dans  $A$  il existe un chemin de  $x$  vers  $y$ .

**Remarque :** Cela revient à dire qu'il n'y a qu'une classe d'équivalence pour la relation précédente.

#### Proposition 12.82

Les parties connexes par arcs de  $\mathbf{R}$  sont les intervalles.

**Démonstration :**

- Il est clair que les intervalles sont connexes par arcs. En effet, pour tout  $(x, y) \in A^2$  on peut poser

$$\gamma : t \mapsto (1 - t)x + ty$$

- Réciproquement, montrons que les parties connexes pas arcs sont les intervalles. Soit  $A$  une partie connexe par arcs. On pourrait faire une démonstration directe avec une disjonction selon que  $A$  soit majorée ou non, minorée ou non et selon que l'éventuelle borne supérieure / inférieure appartienne ou non à  $A$ . Il est plus simple de montrer que si  $A$  est connexe par arcs alors elle est convexe et d'utiliser le résultat prouvé précédemment.

Soit  $x, y$  dans  $A$ , comme  $A$  est connexe par arcs, il existe  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  une application continue telle que  $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$  et  $\gamma$  prend ses valeurs dans  $A$ . On peut utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que toutes les valeurs  $z$  comprise entre  $x$  et  $y$  sont atteintes par  $\gamma$  et sont donc dans  $A$ . On en déduit que  $A$  est convexe. C'est donc un intervalle. □

#### Définition 12.83 (Parties étoilées)

Soit  $A \subset E$ . Elle est dite étoilée s'il existe  $x_0 \in A$  tel que pour tout  $y$  de  $A$ , l'intervalle  $[x_0, y]$  est inclus dans  $A$ .

Faire un dessin

#### Proposition 12.84

Soit  $A$  une partie de  $E$  non vide. On a

$$A \text{ convexe} \Rightarrow A \text{ étoilée} \Rightarrow A \text{ connexe par arcs}$$

**Démonstration :** Evident □

**ATTENTION**

Quand on n'est plus dans  $\mathbf{R}$ , les implications ci-dessus ne sont pas des équivalences.

Faire un dessin

**Définition 12.85** (Composantes connexes par arcs)

Soit  $A \subset E$ , on appelle *composantes connexes par arcs* les classes d'équivalences de la relation  $\mathcal{R}$ . En particulier, elles sont connexes par arcs et forment une partition de  $A$ .

**Exemples :**

1. Dans  $A = \mathbf{R}^* \subset \mathbf{R}$  la composante connexe de 1 est  $]0, +\infty[$
2. Dans  $A = \mathbf{C}^* \subset \mathbf{C}$  la composante connexe de 1 est  $\mathbf{C}^*$  en entier.
3. L'ensemble  $A = \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$  a une infinité de composantes connexes.

**Exercice :** Soit  $A$  une partie connexe par arcs. Soit  $X$  une partie de  $A$  qui est ouverte et fermée. Montrer que  $X = \emptyset$  ou  $X = A$ .

**6.3 Image d'une partie connexe par arcs par une application continue**

Nous allons pouvoir généraliser le théorème des valeurs intermédiaire.

**Théorème 12.86**

Soit  $A$  une partie connexe par arcs et  $f$  une application continue de  $A$  dans  $F$ . Son image  $f(A)$  est connexe par arcs.

**Démonstration :** Soit  $y_1, y_2$  deux éléments de  $f(A)$ . Il existe  $x_1$  et  $x_2$  tels que  $f(x_i) = y_i$ . Comme  $A$  est connexe par arcs, il existe un chemin  $\gamma$  qui va de  $x_1$  vers  $x_2$ . La composée  $f \circ \gamma$  est alors un chemin de  $y_1$  vers  $y_2$ .  $\square$

**Remarque :** C'est bien la généralisation du théorème des valeurs intermédiaires car dans le cas de  $\mathbf{R}$ , connexe par arcs est équivalent à intervalle.

**Exercice :** Montrer que  $\text{GL}_n(\mathbf{R})$  n'est pas connexe par arcs et que  $\text{GL}_n(\mathbf{C})$  est connexe par arcs.