CHAPITRE 13

Espaces préhilbertiens réels

Nous allons étudier les espaces préhilbertiens réels. C'est-à-dire les espaces vectoriels munis d'un produit scalaire.

1 Rappels

Définition 13.1 (Produit scalaire)

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire une forme bilinéaire symétrique définie positive. On a donc

- $\forall u \in E, (\bullet|u)$ *et* $(u|\bullet)$ *sont linéaires*
- $\forall (u,v) \in E^2, (u|v) = (v|u)$
- $\forall u \in E, (u|u) \geqslant 0$
- $\forall u \in E, (u|u) = 0 \iff u = 0.$

Définition 13.2

On appelle espace préhilbertien un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire. Si de plus cet espace est de dimension finie, on parle d'espace euclidien.

Définition 13.3

Soit E un espace préhilbertien. L'application

$$\begin{array}{cccc} ||.|| & E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & ||x|| = \sqrt{(x|x)} \end{array}$$

est une norme que l'on appelle norme euclidienne.

Exemple : Structure euclidienne canonique de $\mathbf{R}^n$: La structure euclidienne canonique de $\mathbf{R}^n$ (c'est-à-dire celle pour laquelle la base canonique est une base orthonormée) est définie par

$$\begin{array}{cccc} (\bullet|\bullet) : & \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{array}$$

Proposition 13.4

Soit E un espace euclidien et $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée. Soit u et v deux vecteurs de E. Si on note

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

les matrices colonnes des coordonnées de u et v dans la base $\mathscr{B}$. On a

$$(u|v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = {}^tUV$$

Théorème 13.5 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une famille libre de vecteurs de E. Il existe une famille orthonormale $(f_1,\dots,f_p)$ telle que, pour tout $k \in [\![1 ; p]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) = \mathrm{Vect}(f_1,\dots,f_k)$.

Exemple : En Python si on suppose avoir une fonction `scal` qui permet de calculer le produit scalaire de deux vecteurs. On peut écrire une fonction qui, à partir d'une liste de vecteurs renvoie la famille orthonormale obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

```
def GS(l) :
    res = []
    for e in l :
        ftemp = e
        for f in res :
            ftemp = ftemp - scal(e,f)*f
        res.append(ftemp / sqrt(scal(ftemp,ftemp)))
    return(res)
```

2 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Soit E un espace préhilbertien. On le considère comme un espace vectoriel normé par la norme euclidienne notée $||.||$

2.1 Définition

Proposition-Définition 13.6 (Orthogonal)

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace préhilbertien. On appelle orthogonal de F et on note $F^\perp = \{u \in E \mid \forall v \in F, (u|v) = 0\}$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à **tous** les vecteurs de F. C'est un espace vectoriel.

Théorème 13.7

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie, $F \oplus F^\perp = E$. On dit que F et $F^\perp$ sont en somme directe orthogonale.

Remarque : Ceci est en particulier toujours vérifié si E est euclidien.

ATTENTION

En général, il est faux de dire que $F \oplus F^\perp = E$. On a toujours $F \cap F^\perp = \{0\}$, en effet pour $u \in F \cap F^\perp$ on a $(u|u) = 0$. Par contre on peut avoir $F \oplus F^\perp \subsetneq E$. Par exemple dans $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbf{R})$ avec le produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$. Si on considère $F = \mathbf{R}[X]$ les fonctions polynomiales, alors $F^\perp = \{0\}$. En effet soit $f \in F^\perp$, il existe une suite de polynômes P_n qui converge uniformément vers f d'après le théorème de Weierstrass ($[0,1]$ est un segment). Maintenant, pour tout entier n,

$$(f|f) = (f|f - P_n + P_n) = (f|f - P_n) + (f|P_n) = (f|f - P_n) \leqslant ||f||_\infty ||f - P_n||_\infty$$

On en déduit en faisant tendre n vers $+\infty$ que $(f|f) = 0$ et donc $f = 0$.

Démonstration :

On a vu que $F \cap F^\perp = \{0\}$. Donnons deux démonstrations du fait que $F + F^\perp = E$.

— Première preuve : On procède par analyse-synthèse. On considère une base $(f_1, \ldots, f_p)$ orthonormée de F que l'on peut obtenir par orthonormalisation.

  — Analyse : Soit $x \in E$ et $(u, v) \in F \times F^\perp$ tels que $x = u + v$. On a donc $u = \displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i$ et $v = x - u = x - \displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i$.
  Par hypothèse, $(v|f_1) = 0$ ce qui signifie que

$$\left(x - \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i \middle| f_1\right) = 0 \Rightarrow (x|f_1) = \lambda_1 (f_1|f_1) = \lambda_1.$$

  De la même manière, pour tout $i \in [\![1 \,;\, p]\!]$, $(v|f_i) = 0$ et donc $\lambda_i = (x|f_i)$.

  — Synthèse : soit $x \in E$, on pose pour tout $i \in [\![1 \,;\, p]\!]$, $\lambda_i = (x|f_i)$. On pose alors $u = \sum_{i=1}^p \lambda_i f_i$ et $v = x - v$. Il est clair que $u \in F$, $u + v = x$ et le calcul précédent montre que pour tout $i \in [\![1 \,;\, p]\!]$, $(v|f_i) = 0$ donc $v \in F^\perp$.

— Deuxième preuve : On considère cette fois une base **non nécessairement orthonormée** $(f_1, \ldots, f_p)$ de F. On reprend le même principe on veut écrire $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in F^\perp$ c'est-à-dire que $u = \displaystyle\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i$ et $\forall i \in [\![1 \,;\, p]\!]$, $(v|f_i) = 0$. Cherchons encore les coefficients λ_i.
Le fait que $(x - u|f_1) = 0$ donne :

$$(x|f_1) = \sum_{i=1}^p \lambda_i (f_i|f_1)$$

En prenant toutes les équations on trouve que le vecteur $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}$ doit vérifier l'équation

$$G\Lambda = X$$

où

$$G = \begin{pmatrix} (f_1|f_1) & \cdots & (f_p|f_1) \\ \vdots & & \vdots \\ (f_1|f_p) & \cdots & (f_p|f_p) \end{pmatrix} \text{ et } X = \begin{pmatrix} (x|f_1) \\ \vdots \\ (x|f_p) \end{pmatrix}$$

La matrice G s'appelle la matrice de Gram de la famille.

Remarquons alors que la matrice G est inversible en effet son noyau est réduit à $\{0\}$. Cela se déduit du fait que si $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ alors pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$ $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} y_j (f_j|f_i) = 0$ de ce fait

$${}^tYGY = \sum_{i=1}^{p} y_i \sum_{j=1}^{p} y_j (f_j|f_i) = 0$$

or ce terme est juste $\left(\sum y_i f_i | \sum y_j f_j\right) = ||\sum y_i f_i||_2^2$. On en déduit que tous les y_i sont nuls car $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre. Finalement ce système a une unique solution Λ qui répond au problème.

□

Proposition 13.8

Avec les notations précédentes, si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une base orthonormée de F alors pour tout vecteur x,

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i \text{ où } \lambda_i = (x|f_i).$$

Démonstration : Cela a été vu dans la demonstration précédente. □

Définition 13.9

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie. On appelle projection orthogonale sur F et on note p_F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$

Remarque : Les démonstrations ci-dessus donne un moyen de calculer le projeté orthogonal d'un vecteur x (le vecteur u de la démonstration). Il faut utiliser la première si on a déjà une base orthonormée de F et la deuxième dans le cas contraire (à moins de calculer au préalable l'orthonormalisation de la base).

2.2 Propriétés

Proposition 13.10

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Pour tout x de E,

$$d(x, F) = ||x - p(x)||_2.$$

C'est-à-dire que $p(x)$ est le vecteur de F le plus proche de x.

Démonstration :

Faire un dessin

Pour tout v de F

$$\begin{aligned} d(v,x)^2 &= (x-v|x-v) \\ &= (x - p_F(x) + p_F(x) - v | x - p_F(x) + p_F(x) - v) \\ &= ||x - p_F(x)||_2^2 + 2(x - p_F(x) | p_F(x) - v) + ||p_F(x) - v||_2^2. \end{aligned}$$

Or $p_F(x) - v \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$ donc $(x - p_F(x)|p_F(x) - v) = 0$. Finalement,

$$d(v,x)^2 = (x-v|x-v) = ||x - p_F(x)||_2^2 + ||p_F(x) - v||_2^2 \geqslant ||x - p_F(x)||_2^2 = d(x, p_F(x))^2.$$

□

Exemple : On veut calculer

$$\inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - (at+b))^2 dt.$$

On considère $E = \{f \in \mathscr{C}^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}) \mid t \mapsto e^{-t} f(t) \text{ est intégrable}\}$. En particulier, les fonctions polynomiales appartiennent à E. C'est un espace vectoriel (sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$). On peut aussi travailler avec $E = \mathbf{R}[X]$.

On pose alors le produit scalaire

$$\forall (f,g) \in E^2, (f|g) = \int_0^{+\infty} e^{-t} f(t) g(t) dt.$$

Le fait que ce soit un produit scalaire est « classique ». Si on pose $F = \mathbf{R}_1[X]$, la question est de calculer $d(X^2, F)^2$. Pour cela on calcule $P = p_F(X^2)$. Il est de la forme $P = a + bX \in F$ et on sait que $(X^2 - P|1) = (X^2 - P|X) = 0$. Calculons de manière générale

$$(X^p|X^q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p+q} dt \underset{\text{IPP}}{=} (p+q) \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{p+q-1} dt \underset{\text{IPP}}{=} \cdots \underset{\text{IPP}}{=} (p+q)! \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = (p+q)!$$

On en déduit que a et b vérifient

$$\begin{cases} a + b &= 2 \\ a + 2b &= 6 \end{cases}$$

En résolvant, on trouve $a = 4$ et $b = -2$ et donc $P = 4 - 2X$. Pour finir, en utilisant le théorème de Pythagore

$$d(X^2, F)^2 = ||X^2 - p_F(X^2)||_2^2 = ||X^2||_2^2 - ||p_F(X^2)||_2^2 = 24 - 8 = 16.$$

En conclusion,

$$\inf_{(a,b)\in\mathbf{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}(t^2 - (at+b))^2 dt = 4.$$

Proposition 13.11 (Inégalité de Bessel)

1. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie et $x \in E$,

$$||p_F(x)||_2 \leqslant ||x||_2$$

2. Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille orthonormale finie de E,

$$\sum_{i=1}^{p} (x|e_i)^2 \leqslant ||x||_2$$

Démonstration :

1. Il suffit d'utiliser le théorème de Pythagore. On a

$$||x||^2 = ||p_F(x)||^2 + ||x - p_F(x)||^2$$

et donc

$$||p_F(x)||_2 \leqslant ||x||_2.$$

2. On pose $F = \mathsf{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ en on utilise l'inégalité de Bessel :

$$\sum_{i=1}^{p} (x|e_i)^2 = \left\| \sum_{i=1}^{p} (x|e_i) e_i \right\| = ||p_F(x)|| \leqslant ||x||_2$$

□

On peut généraliser cela au cas où la famille orthonormée est infinie (si E est de dimension infinie).

Proposition 13.12 (Inégalité de Bessel généralisée)

Si $(e_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une famille orthonormée de E (supposé donc de dimension infinie). Pour tout vecteur x de E, la série $\left(\sum_{i\in\mathbf{N}} (x|e_i)^2\right)$ converge et

$$\sum_{i=0}^{+\infty}(x|e_i)^2 \leqslant ||x||^2$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer l'inégalité de Bessel pour les famille $(e_1, \dots, e_p)$ pour tout $p \in \mathbf{N}$. □

3 Suites totales

On aimerait définir des « bases » d'un espace vectoriel E. Cependant, en algèbre linéaire on ne peut faire que des combinaisons linéaires finies. Il va falloir utiliser un passage à la limite.

3.1 Définitions

Définition 13.13 (Suite totale)

Une suite $(e_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est dite totale si l'espace vectoriel engendré par la famille est dense dans E. On a donc

$$\overline{\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in\mathbf{N}}} = E$$

où l'adhérence est prise relativement à la norme euclidienne $||.||_2$.

Remarque : Rappelons que $\mathrm{Vect}(e_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires **finies** des vecteurs de la familles. C'est-à-dire les vecteur x de E tels qu'il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in\mathbf{N}}$ **presque nulle** telle que

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} \lambda_i e_i.$$

Proposition 13.14

Soit $(e_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) La suite $(e_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est totale.

ii) Pour tout x de E la suite (x_n) des projetés orthogonaux de x sur $F_n = \mathrm{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ converge vers x.

Démonstration : Remarquons qu'avec les notations de l'énoncé, $d(x, F_n) = ||x_n - x||$. C'est une suite décroissante car $F_n \subset F_{n+1}$. Posons aussi $F = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n = \mathrm{Vect}(e_i)_{i\in\mathbf{N}}$.

— $\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ La suite $(||x_n - x||)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante et minorée par 0. Supposons par l'absurde qu'elle en converge pas vers 0. Elle converge donc vers $\ell > 0$. On en déduit donc que pour tout y de F, $d(x, y) \geqslant \ell$ car y appartient à l'un des F_n. Cela contredit le fait que la suite (e_i) est totale. en utilisant la caractérisation séquentielle de l'adhérence.

— $\boxed{ii) \Rightarrow i)}$ Pour tout x de E, il existe une suite d'éléments de F tels que $(x_n) \to x$ donc $\overline{F} = E$ et la suite $(e_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est totale.

□

Proposition 13.15

Soit $(e_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite **orthonormale** totale. Pour tout vecteur x de E, la série $\left(\sum_{i\in\mathbf{N}}(x|e_i)^2\right)$ converge et $x = \sum_{i=0}^{+\infty}(x|e_i)e_i$. On en déduit

$$\sum_{i=0}^{+\infty}(x|e_i)^2 = ||x||^2.$$

Démonstration : En reprenant les résultats précédents, on a $x_n = \sum_{i=0}^{n}(x|e_i)e_i$. Comme on sait que la suite (x_n) tend vers x on a bien $x = \sum_{i=0}^{+\infty}(x|e_i)e_i$. En utilisant que $||x_n||^2 = \sum_{i=0}^{n}(x|e_i)^2$ on obtient de plus que

$$\sum_{i=0}^{+\infty}(x|e_i)^2 = ||x||^2.$$

□

3.2 Exemples

Traitons quelques exemples de suites totales.

— Dans $E = \ell^2(\mathbf{N},\mathbf{R})$ l'espace préhilbertien des suites (u_n) réels tels que $\left(\sum u_n^2\right)$ converge avec le produit scalaire

$$(u|v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

On rappelle que cette somme est définie pour tout entier N par,

$$\sum_{n=0}^{N} u_n v_n \leqslant \sqrt{\sum_{n=0}^{N} u_n^2 \times \sum_{n=0}^{N} v_n^2}.$$

On pose alors pour tout $i \in \mathbf{N}$ la suite $e_i \in E$ définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, (e_i)_n = \delta_{i,n}.$$

Il est clair que c'est une famille orthonormale. Justifions qu'elle est totale.
Quand on considère une suite $u = (u_n)$ de E, on a pour tout $i \in \mathbf{N}$,

$$(u|e_i) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \delta_{n,i} = u_i$$

De ce fait, si on note pour tout $N \in \mathbf{N}$, $F_N = \mathsf{Vect}(e_0, \dots, e_N)$ on a

$$p_{F_N}(u) = \sum_{i=0}^{N} u_i e_i$$

c'est-à-dire la suite $p_{F_N}(u) = (u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, u_N, 0, \dots)$ obtenue en « tronquant » la suite u. On voit alors que

$$||u - p_{F_N}(u)|| = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n^2$$

qui est le reste de la série $\left(\sum u_n^2\right)$ qui converge par hypothèses. On a donc $p_{F_N}(u) \to u$. Ceci étant vrai pour toute suite u, on a bien que la famille est totale.

— Séries de Fourier Ce qui précède se généralise aux espaces préhilbertiens complexes. Si on considère l'ensemble des fonctions 2π-périodiques définies sur $\mathbf{R}$ et à valeurs dans $\mathbf{C}$. On peut définir pour f, g dans cet espace,

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\overline{g}$$

Cela s'appelle un produit scalaire hermitien et cela se comporte « presque » comme une produit scalaire classique. On considère alors la famille $u_n : x \mapsto e^{inx}$ qui est orthonormée.
On note

$$c_n(f) = (f|u_n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\overline{u_n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}.$$

On pose alors

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} c_n(f)u_n$$

Sous de bonnes hypothèses ($\mathscr{C}^0$ par exemple) la suite (S_N) converge pour la norme associée vers la fonction f : $||f - S_N|| \to 0$. On a même que si f est de classe $\mathscr{C}^1$, il y a convergence simple de la suite S_N vers f.

— Polynômes orthogonaux : Soit $I = [a, b]$ un segment non réduit à un point. On pose $E = \mathscr{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ avec le produit scalaire usuel.

$$\forall (f, g) \in E^2, (f|g) = \int_a^b fg$$

On pose alors pour tout $i \in \mathbf{N}$ $e_i = X^i$ en identifiant le polynôme à sa fonction polynomiale sur $[a, b]$. On a alors $F = \mathrm{Vect}(e_i)_{i\in\mathbf{N}} = \mathbf{R}[X] \subsetneq E$.

Théorème 13.16 (Théorème de Stone-Weierstrass)

Soit f une fonction continue sur un **segment** I à valeurs dans $\mathbf{K}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction polynomiale P telle que $||f - P||_\infty \leqslant \varepsilon$. En particulier, f est limite uniforme de fonctions polynomiale ce qui signifie qu'il existe une suite (P_n) de fonctions polynomiales telle que $P_n \xrightarrow{CU} f$.

Démonstration : Voir devoir □

Cependant, d'après le théorème de Weierstrass, toute fonction continue est limite uniforme d'une suite de polynômes. Pour tout f de E, il existe $(P_n) \in F^{\mathbf{N}}$ telle que $(P_n) \to f$ pour la norme $||.||_\infty$. En utilisant alors que $||.|| \leqslant \sqrt{b-a}||.||_\infty$ on obtient que (P_n) tend vers f aussi pour la norme $||.||$. On a que $\overline{F} = E$ donc la famille (e_i) est totale.
Notons que le même argument fonctionne pour toute famille (e_i) de polynômes telle que $\deg e_i = i$.

Cependant, elle n'est pas (à priori) orthonormale. On va donc l'orthonormaliser par le procédé de Gram-Schmidt. Traitons le cas où $I = [-1, 1]$. On va commencer par trouver une famille **orthogonale**. On normalisera à la fin

- On pose donc $P_0 = 1$.
- On cherche ensuite $P_1 = X + \lambda P_0$ tel que $(P_1|P_0) = 0$. Cela donne

  $$(X|P_0) + \lambda(P_0|P_0) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{(X|P_0)}{(P_0|P_0)} = 0$$

  On pose donc $P_1 = X$
- On cherche ensuite $P_2 = X^2 + \lambda_1 P_1 + \lambda_0 P_0$ tel que $(P_2|P_1) = (P_2|P_0) = 0$. Cela donne

  $$(X^2|P_1) + \lambda_1(P_1|P_1) + 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{(X^2|P_1)}{(P_1|P_1)} = 0$$

  et

  $$(X^2|P_0) + 0 + \lambda_0(P_0|P_0) = 0 \Rightarrow \lambda_0 = -\frac{(X^2|P_0)}{(P_0|P_0)} = \frac{1}{3}$$

  On pose donc $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$.
- On cherche ensuite $P_3 = X^3 + \lambda_2 P_2 + \lambda_1 P_1 + \lambda_0 P_0$. Un calcul similaire donne alors $\lambda_2 = \lambda_0 = 0$ et $\lambda_1 = -\frac{3}{5}$ On pose donc $P_3 = X^3 - \frac{3}{5}X$.

On peut alors normaliser ces polynôme. On a

$$||P_0||^2 = (P_0|P_0) = 2 \text{ on pose donc } Q_0 = \frac{P_0}{||P_0||} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De même

$$||P_1||^2 = (P_1|P_1) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3} \text{ on pose donc } Q_1 = \frac{P_1}{||P_1||} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} X.$$

De même

$$||P_2||^2 = (P_2|P_2) = (P_2|X^2 - \lambda P_0) = (P_2|X^2) = \int_{-1}^{1} x^4 - \frac{1}{3}x^2 dx = \frac{2}{5} - \frac{2}{9} = \frac{8}{45}$$

on pose donc

$$Q_2 = \frac{P_2}{||P_2||} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{8}}(X^2 - \frac{1}{3}).$$

Ce sont les polynômes de Legendre

Adrien-Marie Legendre (1752-1797)

Remarques :

1. Il existe de nombreux autres familles de polynômes orthogonaux obtenues en changeant le produit scalaire.
   - Les polynômes de Tchebychev de première espèce obtenus par $I =]-1, 1[$ et
   $$(f|g) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} f(t)g(t)dt$$
   - Les polynômes de Tchebychev de deuxième espèce obtenus par $I = [-1, 1]$ et
   $$(f|g) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2} f(t)g(t)dt$$
   - Les polynômes de Laguerre obtenus par $I = [0, +\infty[$ et
   $$(f|g) = \int_{0}^{+\infty} e^{-t} f(t)g(t)dt$$
   - Les polynômes de Hermite obtenus par $I =]-\infty; +\infty[$ et
   $$(f|g) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} f(t)g(t)dt$$
2. Toutes ces familles de polynômes vérifient aussi des relation de récurrence (d'ordre 2), des familles d'équations différentielles linéaires

Exercice avec Stone-Weierstrass : Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$. On suppose que pour entier n,

$$\int_a^b f(t)t^n dt = 0.$$

On veut montrer que f n'est pas nul.

On remarque d'abord que par linéarité, pour tout polynôme P,

$$\int_a^b f(t)P(t)dt = 0.$$

Maintenant pour $\varepsilon > 0$, il existe d'après le théorème de Stone-Weierstrass un polynôme P tel que $||f - P||_\infty \leqslant \varepsilon$. On a alors

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f^2(t)dt\right| &= \left|\int_a^b f(t)P(t)dt + \int_a^b f(t)(f(t)-P(t))dt\right| \\ &\leqslant \left|\int_a^b f(t)P(t)dt\right| + \left|\int_a^b f(t)(f(t)-P(t))dt\right| \\ &\leqslant 0 + \varepsilon \int_a^b |f(t)|dt \end{aligned}$$

Maintenant la valeur $\int_a^b |f(t)|dt$ est fixé donc en faisant tendre ε vers 0 on obtient que $\int_a^b f^2(t)dt = 0$ et donc $f = 0$.

4 Isométries vectorielles d'un espace euclidien

Dans ce paragraphe, E désigne un espace euclidien.

4.1 Endomorphismes orthogonaux - Rappels

Définition 13.17

On appelle isométrie vectorielle ou automorphisme orthogonal un endomorphisme f de E qui conserve la norme (c'est-à-dire, $\forall u \in E, ||f(u)|| = ||u||$).

Proposition 13.18

Tout endomorphisme orthogonal est un automorphisme.

Démonstration : Comme E est de dimension finie, il suffit de montrer qu'il est injectif. Or si $f(u) = 0$ alors $||f(u)|| = 0$ ce qui implique que $||u|| = 0$ puis $u = 0$.

□

Théorème 13.19

1. Soit f une **application** de E dans lui-même qui conserve le produit scalaire :

$$\forall (u, v) \in E^2, (f(u), f(v)) = (u, v).$$

   L'application f est linéaire et c'est un automorphisme orthogonal.
2. Réciproquement, tout automorphisme orthogonal préserve le produit scalaire.

Démonstration : Voir cours de première année

1. On montre d'abord que f préserve la norme. Pour u et v dans E^2 et λ, μ deux réels :

$$\begin{aligned} ||f(\lambda u + \mu v) - \lambda f(u) - \mu f(v)||^2 &= (f(\lambda u + \mu v) - \lambda f(u) - \mu f(v)|f(\lambda u + \mu v) - \lambda f(u) - \mu f(v)) \\ &= \ldots \\ &= 0 \end{aligned}$$

   On en déduit que f est linéaire et, par suite, est un automorphisme orthogonal.

2. On suppose que f préserve la norme. Pour tout $(u,v) \in E^2$,

$$\begin{aligned} (f(u)|f(v)) &= \frac{1}{4}\left(||f(u)+f(v)||^2 + ||f(u)-f(v)||^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(||f(u+v)||^2 + ||f(u-v)||^2\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(||u+v||^2 + ||u-v||^2\right) \\ &= (u|v) \end{aligned}$$

□

Corollaire 13.20

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée et $f \in \mathscr{L}(E)$,

$$(f \in O(E)) \iff \text{l'image de } \mathscr{B} \text{ par } f \text{ est une base orthonormée.}$$

Démonstration : On pose $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$

— $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $\mathscr{B}$ est une base orthonormale. On a vu que si f était orthogonale elle préserve le produit scalaire. De ce fait, pour i et j entre 1 et n,

$$(f(e_i), f(e_j)) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

donc $(f(e_i))$ est une base orthonormée.

— $\boxed{\Leftarrow}$ Soit $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$,

$$||f(u)||^2 = \left\|\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = ||x||^2.$$

On a bien montré que f était orthogonale.

□

Exemples :

1. Les symétries orthogonales.
Soit s la symétrie par rapport à F et parallèlement à G. Montrons que s est une isométrie si et seulement si $G = F^{\perp}$.

— $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que s est une isométrie. Soit $x \in F$ et $y \in G$, on a

$$(s(x+y)|s(x+y)) = (x-y|x-y) = ||x||^2 - 2(x|y) + ||y||^2$$

et

$$(x+y|x+y) = ||x||^2 + 2(x|y) + ||y||^2$$

Comme s est une isométrie,

$$||s(x+y)||^2 = ||x+y||^2 \iff -2(x|y) = 2(x|y) \iff x \perp y$$

On obtient que $F \subset G^{\perp}$ et donc $F = G^{\perp}$.

— $\boxed{\Leftarrow}$ Soit $u \in E$. Il existe $(x,y) \in F \times G$ tels que $u = x + y$. Comme $G = F^{\perp}$, $(x|y) = 0$.
Le calcul précédent montre donc que $||s(u)||^2 = ||u||^2$. La symétrie s est bien une isométrie.

2. L'endomorphisme $A \mapsto A^T$ de transposition est un automorphisme orthogonal de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ muni du produit scalaire usuel.

ATTENTION

Les projecteurs orthogonaux ne sont pas des isométries (sauf id et -id).

Proposition 13.21

L'ensemble des endomorphismes orthogonaux est un groupe pour la composition que l'on appelle groupe orthogonal et qui se note $O(E)$. Cela signifie que si f et g sont des endomorphismes orthogonaux alors f^{-1} et $f \circ g$ aussi.

Démonstration : Il suffit de voir que c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ car tous les endomorphismes orthogonaux sont des automorphismes. On utilise la caractérisation usuelle des sous-groupes.

— L'identité est une isométrie vectorielle donc $O(E) \neq \emptyset$.

— Soit f et g deux endomorphismes orthogonaux, il faut montrer que $f \circ g^{-1}$ est aussi un endomorphisme orthogonal. Soit u dans E, comme g est un automorphisme, on peut poser $v = g^{-1}(u)$ (et donc $u = g(v)$).

$$||u|| = ||g(v)|| = ||v|| = ||f(v)|| = ||(f \circ g^{-1})(u)||$$

Cela montre que $f \circ g^{-1}$ appartient à $O(E)$.

On a bien montré que $(O(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}(E), \circ)$. □

4.2 Matrices orthogonales

Définition 13.22

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) La matrice M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$.

ii) Les colonnes de M forment une base orthonormée.

iii) Les lignes de M forment une base orthonormée.

Remarques :

1. Pour la condition $i)$ il suffit de vérifier que $M{}^tM = I_n$ ou que ${}^tMM = I_n$.
2. Dans les conditions $ii)$ et $iii)$ on a identifié les colonnes ou les lignes de la matrice à $\mathbf{R}^n$ avec son produit scalaire usuel.

Démonstration : Si on note $M = (a_{ij})$, C_i les colonnes de M et que l'on note (b_{ij}) les coefficients de ${}^tMM$. On a

$$\forall (i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]^2, b_{ij} = {}^tC_iC_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = (C_i|C_j).$$

On a donc que les colonnes de M forment un base orthonormée si et seulement si ${}^tMM = I_n$.
De même les lignes de M forment une base orthonormée si et seulement si $M{}^tM = I_n$.
On conclut en utilisant que

$${}^tMM = I_n \iff M{}^tM = I_n \iff M^{-1} = {}^tM.$$

□

Définition 13.23

Un matrice vérifiant les conditions ci-dessus s'appelle une matrice orthogonale. On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Remarque : On voit que $M \in O(n) \iff {}^tM \in O(n)$.

Exemples :

1. Une matrice diagonale avec des éléments de $\{\pm 1\}$ sur la diagonale est orthogonale.
2. Les matrices $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ sont orthogonales.

Théorème 13.24

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ on a

$$f \in O(E) \iff \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in O(n).$$

Démonstration : Si on note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$.

$$\begin{aligned} f \in O(E) &\iff \text{ l'image de } \mathscr{B} \text{ par } f \text{ est une base orthogonale} \\ &\iff \text{la famille } (f(e_i)) \text{ est une famille orthonormale pour la structure euclidienne de } E \\ &\iff \text{La famille } C_i \text{ est orthonormale pour la structure euclidienne canonique de } \mathbf{R}^n \\ &\iff \mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \in O(n) \end{aligned}$$

□

Corollaire 13.25

Pour la multiplication des matrices, $O(n)$ est un sous-groupe de $\mathsf{GL}_n(\mathbf{R})$ et pour toute base orthonormale,

$$\begin{array}{ccc} O(E) & \longrightarrow & O(n) \\ f & \longmapsto & \mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme de groupe.

Proposition 13.26

Soit M une matrice orthogonale. Son déterminant appartient à $\{\pm 1\}$.

Démonstration : Il suffit de voir que ${}^tMM = I_n$ implique $\det(M)^2 = 1$. □

ATTENTION

Ce n'est pas une équivalence. Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Son déterminant vaut 1 mais elle n'est pas orthogonale.

4.3 Groupe spécial orthogonal et orientation

Définition 13.27

1. *On appelle groupe spécial orthogonal (ou groupe des rotations) et on note $SO(n)$ le sous-groupe de $O(n)$ constitué des matrices orthogonales de déterminant 1.*
2. *On appelle groupe spécial orthogonal (ou groupe des rotations) et on note $SO(E)$ le sous-groupe de $O(E)$ constitué des endomorphismes orthogonaux de déterminant 1.*

Remarque : On peut justifier que ce sont des sous-groupes en voyant que c'est le noyau du déterminant qui est un morphisme de groupes

$$\det : O(n) \longrightarrow \{\pm 1\}$$

Exercice : Montrer que $O(n)$ et $SO(n)$ sont compacts.

On commence par $O(n)$. L'application $\Phi : M \mapsto {}^tMM$ est continue par chaque coefficient de ${}^tMM$ est polynomial en les coefficients de M (on peut aussi dire que $M \mapsto {}^tM$ est linéaire et que le produit matriciel est continue). On en déduit que $O(n) = \Phi^{-1}(\{I_n\})$ est l'image réciproque d'un fermé (un singleton est fermé) par une application continue. C'est donc un fermé.

De plus, si on considère la norme euclidienne sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Pour toute matrice orthogonale M, $||M||_2 = \sqrt{\operatorname{tr}({}^tMM)} = \sqrt{n}$. Cela montre que $O(n)$ est inclus dans la boule fermé de centre 0 et de rayon $\sqrt{n}$ pour la norme 2. On obtient donc que $O(n)$ est bornée. Comme $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est de dimension finie, une partie fermée et bornée est compacte.

L'application det est continue car polynomiale en ses coordonnées. On sait donc que $\det^{-1}(\{1\})$ est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Cela implique que $SO(n)$ est un fermé de $O(n)$ qui est compact et donc $SO(n)$ est compact.

On considère sur l'ensemble des bases orthonormées de E la relation binaire suivante :

$$\mathscr{B} R \mathscr{B}' \iff \det(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}) = 1$$

On peut montrer aisément que c'est une relation d'équivalence.

De plus, soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ un base orthonormale. On considère $\mathscr{B}' = (e_1, \ldots, e_{n-1}, -e_n)$. Il est clair que $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ ne sont pas en relation. Par contre, toute base orthonormale est en relation avec $\mathscr{B}$ ou avec $\mathscr{B}'$.

Définition 13.28 (Orientation)

La relation R est une relation d'équivalence.
Se donner une orientation revient à choisir une des deux classes d'équivalence de cette relation. Les bases qui appartiennent à cette classe s'appellent les bases orthonormées directes.

Proposition 13.29

Un endomorphisme f appartient à $SO(E)$ si et seulement s'il transforme une base orthonormée directe en une base orthonormée directe. On dit aussi que f est un automorphisme orthogonal direct.

Démonstration : En exercice □

4.4 Endomorphismes orthogonaux du plan euclidien

Dans tout ce paragraphe, E désigne un plan euclidien orienté c'est-à-dire un espace euclidien de dimension 2 orienté.

Notation : Soit $\theta \in \mathbf{R}$ on note $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Remarque : On voit que $R(\theta)$ et $S(\theta)$ sont des éléments de $O(2)$.

De plus $\mathrm{Det}(R(\theta)) = 1$ et donc $R(\theta) \in SO(2)$ alors que $\mathrm{Det}(S(\theta)) = -1$.

Théorème 13.30

Soit M une matrice de $O(2)$. Il existe θ dans $\mathbf{R}$ tel que $M = R(\theta)$ ou $M = S(\theta)$.

Démonstration : On note $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Comme M est orthogonale, on a $a^2 + c^2 = 1$ (car « la colonne est normée ») et de ce fait il existe θ tel que $a = \cos\theta$ et $c = \sin\theta$. De même, il existe φ tel que $b = \cos\varphi$ et $d = \sin\varphi$. Maintenant, en utilisant que les deux colonnes sont orthogonales on obtient :

$$\begin{aligned} \cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\sin\varphi = 0 &\iff \cos(\theta - \varphi) = 0 \\ &\iff \theta - \varphi = \frac{\pi}{2}[\pi] \\ &\iff \varphi = \theta - \frac{\pi}{2}[\pi]. \end{aligned}$$

- Si $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}[2\pi]$ on a donc $c = \cos\varphi = -\sin\theta$ et $d = \sin\varphi = \cos\theta$. On a donc $M = R(\theta)$.
- Si $\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}[2\pi]$ on a donc $c = \cos\varphi = \sin\theta$ et $d = \sin\varphi = -\cos\theta$. On a donc $M = S(\theta)$.

□

Corollaire 13.31

1. On a $SO(2) = \{R(\theta) \mid \theta \in \mathbf{R}\}$.
2. L'application de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(SO(2), \times)$ qui associe à θ la matrice $R(\theta)$ est un morphisme surjectif de groupe dont le noyau est $2\pi\mathbf{Z}$. En particulier, $SO(2)$ est un groupe abélien.

Proposition 13.32

Soit f un endomorphisme de $SO(E)$. Il existe un unique réel θ à 2π-près tel que dans toute base orthonormée directe sa matrice soit $R(\theta)$.

Démonstration : On sait que la matrice de f dans une base orthonormée directe $\mathscr{B}$ appartient à $SO(2)$. Elle est donc de la forme $R(\theta)$. Maintenant si $\mathscr{B}'$ est une autre base orthonormée directe alors la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est aussi un élément de $SO(2)$. Comme $SO(2)$ est abélien,

$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P^{-1}R(\theta)P = R(\theta)P^{-1}P = R(\theta).$$

□

Définition 13.33

Avec les notations précédentes, on dit que f est une rotation d'angle θ ou que θ est une mesure de f.

Proposition 13.34

Soit f un automorphisme orthogonal indirect. C'est une réflexion.

Démonstration : On choisit une base orthogonale. On voit que la matrice de f est de la forme $S(\theta)$. On en déduit par le calcul que $f^2 = \mathrm{Id}$ car $S(\theta)^2 = I_2$.

Donc f est une symétrie orthogonale. On regarde le noyau de $f - \mathrm{Id}$. Comme f n'est pas Id ni -Id (qui sont des rotations) on en déduit que le noyau de $f - \mathrm{Id}$ est de dimension 1. C'est bien une réflexion.

□

Remarque : En reprenant les notations ci-dessus. On se place dans une base orthonormée directe (i,j) et on note $S(\theta)$ sa matrice. Si on cherche une équation de $\mathsf{Ker}\,(f - \mathrm{Id})$ il suffit de résoudre :

$$\left\{\begin{array}{rcl} ((\cos\theta) - 1)x + (\sin\theta)y & = & 0 \\ (\sin\theta)x + (-(\cos\theta) - 1)y & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} \sin(\theta/2)\left(-\sin(\theta/2)x + \cos(\theta/2)y\right) & = & 0 \\ \cos(\theta/2)\left(\sin(\theta/2)x - \cos(\theta/2)y\right) & = & 0 \end{array}\right.$$

Le vecteur $u = \cos\dfrac{\theta}{2} i + \sin\dfrac{\theta}{2} j$ est une solution. On en déduit que f est une symétrie par rapport à $\mathsf{Vect}(u)$.

ATTENTION

Soit f un endomorphisme orthogonal du plan euclidien.

- Si c'est un automorphisme direct, c'est une rotation et il existe θ tel que, pour toute base orthonormée $\mathscr{B}$,
$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = R(\theta)$$
- S'il n'est pas direct, c'est une réflexion. Pour toute base orthonormée $\mathscr{B}$, il existe θ tel que
$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = S(\theta)$$
Dans ce cas, θ dépend de la base $\mathscr{B}$. En particulier, on peut choisir $\mathscr{B}$ tel que
$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = S(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Remarque : On peut faire ces calculs en identifiant un vecteur (x, y) avec le nombre complexe $z = x + iy$. La matrice $R(\theta)$ correspond alors à la multiplication par $e^{i\theta}$. La matrice $S(\theta)$ à $z \mapsto e^{i\theta}\overline{z}$. En effet, si on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$R(\theta)X = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\theta)X = \begin{pmatrix} x\cos\theta + y\sin\theta \\ x\sin\theta - y\cos\theta \end{pmatrix}$$

On vérifie aisément alors que

$$e^{i\theta}z = (x\cos\theta - y\sin\theta) + i(x\sin\theta + y\cos\theta) \quad \text{et} \quad e^{i\theta}\overline{z} = (x\cos\theta + y\sin\theta) + i(x\sin\theta - y\cos\theta)$$

4.5 Réduction des isométries

On considère maintenant un espace euclidien orienté de dimension quelconque Soit f un endomorphisme orthogonal, on va chercher une base $\mathscr{B}$ orthogonale, telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ soit la plus simple possible. Remarquons pour commencer que f n'est pas nécessairement diagonalisable (dans $\mathbf{R}$). Par exemple, la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans $\mathbf{R}^2$ a pour matrice dans la base canonique

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice a pour polynôme caractéristique $\chi = X^2 + 1$ qui n'a pas de racines réelles.

Nous allons procéder par récurrence en :

- Trouver un sous-espace stable F - lemme A
- Vérifier que $F^{\perp}$ est aussi stable par f - lemme B
- Recommencer pour $\check{f}$ l'endomorphisme induit par f sur $F^{\perp}$.

Lemme 13.35 (Lemme A)

Soit f un endomorphisme (quelconque) de E. Si on suppose que $E \neq \{0\}$ alors il existe une droite ou un plan F stable par f.

Remarque : Ce lemme est valable en générale pour tout endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

Démonstration :

- Première preuve : Soit A la matrice de f dans une base $\mathscr{B}$ fixée de E. On sait que A admet une valeur propre (éventuellement complexe). C'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in \mathbf{C}$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ non nul tel que $AX = \lambda X$.
  - Si X est a coefficient réels, alors λ est aussi réel. Soit x tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = X$, le vecteur x est un vecteur propre et donc $F = \mathrm{Vect}(x)$ est stable par f.
  - Si X n'est pas à coefficients réels, on pose $X = U + iV$ avec $(U, V) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})^2$. Posons aussi $\lambda = \alpha + i\beta$ avec α et β réels. On a alors

    $$AX = \lambda X \Rightarrow A(U + iV) = (\alpha + i\beta)(U + iV) \Rightarrow \begin{cases} AU &= \alpha U - \beta V \\ AV &= \beta U + \alpha V \end{cases}$$

    Si on note alors u et v les vecteurs de E tels que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = U$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = V$. En posant $F = \mathrm{Vect}(u, v)$ on voit que F est stable par f.

    De plus, comme u ou v (ou les deux) ne sont pas nuls, F est une droite ou un plan.

  Dans tous les cas, il existe une droite ou un plan F stable par f.
- Deuxième preuve : On considère un polynôme P non nul annulateur de f dans $\mathbf{R}[X]$ (que l'on peut choisir unitaire). On peut prendre $P = \mu_f$ ou $P = \chi_f$.

  Ce polynôme se factorise dans $\mathbf{R}[X]$ comme un produit de polynômes irréductibles (que l'on peut choisir unitaires) : $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$. Par définition, $P(f) = P_1(f) \circ P_2(f) \circ \cdots \circ P_r(f) = 0_{\mathscr{L}(E)}$. En particulier, il existe au moins un entier $i \in [\![1 \,;\, r]\!]$ tel que $P_i(f)$ ne soit pas injectif.

  Par symétrie, supposons que $P_1(f)$ n'est pas injectif et donc il existe un vecteur x non nul dans $\ker P_1(f)$. On sait de plus que P_1 est un polynôme irréductible de $\mathbf{R}[X]$
  - Si P_1 est de degré 1. On a $P_1 = X - \lambda$. On a alors que x est un vecteur propre associé à λ car $(f - \lambda \mathrm{id})(x) = 0$. On peut poser $F = \mathrm{Vect}(x)$ qui est stable par f.
  - Si P_1 est de degré 2, on a $P_2 = X^2 + \alpha X + \beta$. On pose alors $F = \mathrm{Vect}(x, f(x))$ qui est de dimension 1 ou 2. Comme de plus, $f^2(x) = -\alpha f(x) - \beta x$, on en déduit que F est stable par f.

  Dans tous les cas, il existe une droite ou un plan F stable par f.

□

Lemme 13.36 (Lemme B)

Soit f un automorphisme orthogonal et F un sous-espace stable par f alors $F^{\perp}$ est aussi stable par f.

Démonstration : Soit $u \in F^\perp$. On veut montrer que $f(u) \in F^\perp$ c'est-à-dire que pour tout vecteur v de F alors $(f(u), v) = 0$. Commençons par remarquer que, comme f est un automorphisme, $f(F) = F$ car le premier est inclus dans le deuxième et ils ont la même dimension. De ce fait si v appartient à F il existe v' dans F tel que $v = f(v')$. On a alors

$$(f(u)|v) = (f(u)|f(v')) = (u|v') = 0.$$

□

Théorème 13.37 (Réduction des isométries - Version endomorphismes)

Soit f une isométrie de E. Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E tel que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ soit diagonale par blocs avec des blocs de la forme

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2); (1) \in O(1); (-1) \in O(1).$$

C'est-à-dire, en regroupant les blocs,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} R_{\theta_1} & & & & \\ \hline & \ddots & & & \\ \hline & & R_{\theta_r} & & \\ \hline & & & I_p & \\ \hline & & & & -I_q \end{array}\right)$$

Démonstration : On procède par récurrence sur la dimension de E.

— Initialisation : Si $\dim E = 1$, les seules isométries sont id et -id.

— Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. On suppose que la propriété est vraie pour tout les entier $k < n$. Soit E de dimension n. On sait qu'il existe un sous-espace vectoriel F stable par f de dimension 1 ou 2. On sait que $F^\perp$ est aussi stable par f et que $\check{f}$ la restriction de f à $F^\perp$ est une isométrie. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de réccurence. Maintenant,

  — Si $\dim F = 1$ alors la restriction de f à F qui est une isométrie est id ou -id.

  — Si $\dim F = 2$ alors la restriction de f à F qui est une isométrie est soit une rotation de matrice $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, soit une symétrie et on peut choisir une base orthonormée telle que sa matrice soit $S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

  Il n'y a plus qu'à concaténer les bases.

□

Corollaire 13.38 (Réduction des isométries - Version matrices)

Soit A une matrice orthogonale. Elle est semblable à une matrice D diagonale par blocs avec des blocs de la forme

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in SO(2); (1) \in O(1); (-1) \in O(1).$$

C'est-à-dire, en regroupant les blocs,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} R_{\theta_1} & & & & \\ \hline & \ddots & & & \\ \hline & & R_{\theta_r} & & \\ \hline & & & I_p & \\ \hline & & & & -I_q \end{array}\right).$$

De plus, cela peut-être obtenu par un changement de bases entre deux bases orthonormales. C'est-à-dire qu'il existe $P \in O(n)$ telle que

$$P^{-1}AP = {}^tPAP = D.$$

4.6 Automorphismes orthogonaux de l'espace

On va appliquer ce qui précède pour $n = 3$.
Par la suite E désigne un espace euclidien orienté de dimension 3.

Proposition 13.39

Soit w un vecteur unitaire de E. Il existe une unique orientation du plan $H = \mathrm{Vect}(w)^{\perp}$ tel que pour toute base orthonormée directe (u, v) de H, la base (u, v, w) soit directe dans E.

Remarque : On dit alors que H est orienté par le vecteur w. On peut d'ailleurs procéder dans l'autre sens. Si on se donne un plan H, pour l'orienter, il suffit de choisir un des deux vecteur unitaires de $H^{\perp}$. On va essayer de décrire les éléments de $SO(E)$ et de $SO(3)$.

Corollaire 13.40

Soit $A \in SO(3)$. Comme $\det A = 1$, elle est semblable a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Démonstration : Il suffit d'appliquer la réduction des isométries.

— S'il n'y a que des blocs de taille 1, on est de la forme voulue en posant $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

— Sinon, on a un bloc de taille 2 et un bloc de taille 1. Le bloc de taille 1 étant (1) car $\det(u) = 1$.

□

Définition 13.41

Soit w une vecteur non nul de E et θ un réel. On appelle rotation d'axe autour de w et d'angle θ, l'automorphisme orthogonal laissant stable $F = \mathrm{Vect}(w)$ et tel que $\check{f}$ la restriction de f à $H = F^{\perp}$ soit la rotation d'angle θ. Si $\mathscr{B} = (u, v, w')$ est une base orthonormée directe avec $w' = w/||w||$, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ est

$$Mat_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarques :

1. La droite vectorielle F s'appelle l'axe de f.
2. Si l'angle vaut π et donc la matrice est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on dit que c'est un demi-tour.
3. Il faut faire attention que si on change w en $-w$ la rotation change car le plan H est alors orienté dans l'autre sens.
4. La plupart du temps on prendra w unitaire.
5. On voit donc que dans les automorphismes orthogonaux de l'espace il y a les rotations (qui sont les éléments de $SO(E)$). Il y a aussi les réflexions. Mais, contrairement au cas du plan, il y en a d'autre. Par exemple l'application $u = -\mathrm{Id}_E$ est un élément de $O(E)$ mais pas de $SO(E)$ car $\det(u) = (-1)^3 = -1$. Mais ce n'est pas une réflexion car aucun vecteur n'est invariant. De fait, c'est la composée du demi-tour de matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et de la réflexion de matrice $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

★ **Méthode :** Il faut savoir déterminer la matrice d'une rotation dont on connait w et θ et inversement, connaissant la matrice il faut savoir retrouver w et θ.

— Détermination de la matrice :

Proposition 13.42

Soit w un vecteur unitaire, θ un réel et f la rotation d'angle θ autour de w. Pour tout vecteur u orthogonal à w, on a
$$f(u) = (\cos\theta)u + (\sin\theta)(w \wedge u).$$

Démonstration : Il suffit de voir que, comme $(u, w, u \wedge w)$ est une base orthonormée directe alors $(u, w \wedge u, w)$ aussi. De ce fait, la matrice de f dans cette base est

$$\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le résultat en découle en regardant la première colonne. □

Soit w le vecteur $w = (1, 2, 0)$. On cherche la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ de la rotation autour de w et d'angle θ. Pour tout vecteur $u = (x, y, z)$ on peut le décomposer comme somme d'un vecteur colinéaire à w et d'un vecteur qui lui est orthogonal (car F et $F^\perp$ sont en somme directe si $F = \mathsf{Vect}(w)$). On a

$$u = \frac{x + 2y}{5} w + \frac{1}{5}(4x - 2y, -2x - 3y, 5z).$$

Maintenant $w \wedge \frac{1}{5}(4x - 2y, -2x - 3y, 5z) = \frac{1}{5}(10z, -5z, -10x + y)$. On a donc

$$f(u) = \frac{x + 2y}{5}(1, 2, 0) + \frac{\cos\theta}{5}(4x - 2y, -2x - 3y, 5z) + \frac{\sin\theta}{5}(10z, -5z, -10x + y).$$

On peut alors en déduire la matrice ...

— Détermination de l'axe et de l'angle : A l'inverse soit $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$. On vérifie que M est bien un matrice orthogonale et que son déterminant vaut 1. L'endomorphisme f canoniquement associé est donc une rotation de $\mathbf{R}^3$.

Pour déterminer l'axe il suffit de chercher les invariant c'est-à-dire le noyau de f−Id. On trouve $w = \frac{1}{\sqrt{11}}(3, -1, -1)$ en le prenant normé.

Maintenant on prend un vecteur orthogonal à w et normé. On prend $u = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3, 0)$. On a

$$\cos\theta = (u, f(u)) = \frac{7}{18} \text{ et } \sin\theta = (f(u), w \wedge u) = \mathsf{Det}(w, u, f(u)) = \frac{5\sqrt{11}}{18}.$$

On peut aussi remarquer que $\operatorname{tr}(f) = 1 + 2\cos\theta$. On retrouve bien $\cos\theta = \frac{\operatorname{tr}(f) - 1}{2} = \frac{7}{18}$.

On peut alors déterminer le signe de θ en remarquant que $\sin\theta$ est du signe de $[u, f(u), w]$ pour $u \notin \mathsf{Vect}(w)$. En effet, en posant $u = \alpha + kw$ on a

$$[\alpha + kw, f(\alpha) + kw, w] = [\alpha, f(\alpha), w] = \sin\theta[\alpha, w \wedge \alpha, w].$$

Exercice : Soit $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$. Justifier que $A \in SO(3, \mathbf{R})$. Déterminer son axe et son angle.

On trouve $w = (1, 1, 0)$ puis $\operatorname{tr}(A) = 2$ d'où $\cos\theta = \frac{1}{2}$ et donc $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$. En prenant $u = (1, 0, 0)$,

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{6} & 0 \end{vmatrix} = \sqrt{6} > 0$$

donc $\theta = \frac{\pi}{3}$.

5 Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

Dans tout ce paragraphe E désigne un espace euclidien.

5.1 Définition

Définition 13.43

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Il est dit symétrique (ou auto-adjoint) si

$$\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u(y))$$

On note $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

Exemple : Dans $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ avec le produit scalaire usuelle $(A|B) = \operatorname{tr}(A^T B)$. Le morphisme $f : M \mapsto M^T$ est symétrique. En effet

$$\forall (A, B) \in E^2, (f(A)|B) = (A^T|B) = \operatorname{tr}(AB) \text{ et } (A|f(B)) = (A|B^T) = \operatorname{tr}(A^T B^T) = \operatorname{tr}((BA)^T) = \operatorname{tr}(BA).$$

On a bien $(f(A)|B) = (A|f(B))$. L'endomorphisme f est symétrique.

Remarque : La terminologie auto-adjoint vient du fait que l'on peut définir de manière générale un endomorphisme u^* que l'on appelle l'adjoint qui vérifie que

$$\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u^*(y))$$

Les endomorphismes symétriques sont donc les endomorphismes qui sont leur propre adjoint.

Proposition 13.44

L'ensemble $\mathscr{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Démonstration : A écrire □

Proposition 13.45

Soit p un projecteur. Il est symétrique si et seulement s'il est orthogonal.

Remarque : Rappelons qu'un projecteur est orthogonal si c'est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$. **Par contre, ce n'est pas un endomorphisme orthogonal**.

Démonstration :

- $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose que p projette sur un sous-espace vectoriel F parallèlement à $F^\perp$. Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E. Si on note
$$x = x_1 + x_2 \text{ et } y = y_1 + y_2$$
avec x_1 et x_2 dans F et y_1 et y_2 dans $F^\perp$. On a
$$(p(x)|y) = (x_1|y_1 + y_2) = (x_1|y_1) + (x_1|y_2) = (x_1|y_1).$$
De même,
$$(x|p(y)) = (x_1|y_1).$$
On a bien $p \in \mathscr{S}(E)$.
- $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $p \in \mathscr{S}(E)$. Soit $x \in \operatorname{Ker} p$ et $y \in \operatorname{Im} p$ alors $(x|y) = (x|p(y)) = (p(x)|y) = (0|y) = 0$. On en déduit que $\operatorname{Im} p \subset (\operatorname{Ker} p)^\perp$ mais comme $\dim \operatorname{Im} p = \dim E - \dim \operatorname{Ker} p = \dim(\operatorname{Ker} p)^\perp$ on a bien $\operatorname{Im} p = (\operatorname{Ker} p)^\perp$.

□

Remarque : On a le même résultat pour les symétries (mais il n'est pas au programme donc à savoir refaire).

- $\boxed{\Leftarrow}$ On considère la symétrie orthogonale s par rapport à F (et parallèlement à $F^\perp$). Pour tout couple (x, y) de vecteurs de E. Si on note
$$x = x_1 + x_2 \text{ et } y = y_1 + y_2$$
avec x_1 et x_2 dans F et y_1 et y_2 dans $F^\perp$. On a
$$(s(x)|y) = (x_1 - x_2|y_1 + y_2) = (x_1|y_1) + (x_1|y_2) - (x_2|y_1) - (x_2|y_2) = (x_1|y_1) - (x_2|y_2).$$
De même,
$$(x|s(y)) = (x_1|y_1) - (x_2|y_2).$$
On a bien $s \in \mathscr{S}(E)$.

— $\boxed{\Rightarrow}$ Soit s une symétrie par rapport à $F = \mathsf{Ker}\,(s-\mathrm{id})$ et parallèlement à $G = \ker(s+\mathrm{id})$. On suppose que $s \in \mathscr{S}(E)$. Soit $x \in F$ et $y \in G$ alors $(x|y) = (s(x)|y) = (x|s(y)) = (x|-y) = -(x|y)$. On en déduit que $(x|y) = 0$. Finalement $G \subset F^\perp$ mais comme $\dim G = \dim E - \dim F = \dim F^\perp$ on a bien $G = F^\perp$.

5.2 Matrice d'un endomorphisme symétrique

Proposition 13.46

Soit $\mathscr{B}$ une base **orthonormale** de E et soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
L'endomorphisme u est symétrique si et seulement si $\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est symétrique.

Démonstration : Fixons les notations. Posons $A = \mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. Pour tout $(x, y) \in E^2$, on note

$$X = \mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \text{ et } Y = \mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(y).$$

Rappelons aussi que comme $\mathscr{B}$ est orthonormale, $(x|y) = X^T Y$. On a alors

$$(u(x)|y) = (AX)^T Y = X^T A^T Y \text{ et } (x|u(y)) = X^T AY.$$

On voit donc que si A est symétrique, ${}^tA = A$ et donc u est symétrique.

Réciproquement si pour tous les matrices colonnes X et Y, $X^T AY = X^T A^T Y$ alors alors $A = A^T$. En effet si on prend pour X la colonne avec juste un 1 à la ligne i et pour Y la colonne avec juste un 1 à la ligne j, le produit $X^T AY$ donne le coefficient a_{ij} de la matrice A. □

Notation : On rappelle que l'on note $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
Exemple : Si on considère une symétrie orthogonale s. On considère une base de E obtenue en concaténant une base orthonormale de F avec une base orthonormale de $F^\perp$. Dans cette base

$$\mathsf{Mat}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R}).$$

ATTENTION

Le résultat est faux si la base n'est pas othonormée. Par exemple dans la base (u, v) où $u = (1, 1)$ et $v = (0, 1)$ la projection orthogonale sur (Ox) a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Corollaire 13.47

On a

$$\dim \mathscr{S}(E) = \dim \mathscr{S}_n(\mathbf{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$$

5.3 Théorème spectral

Nous allons dans ce paragraphe étudier la diagonalisabilité d'un endomorphisme symétrique (ou d'une matrice symétrique réelle).

Commençons par deux lemmes qui sont analogues à ceux de la réduction des endomorphismes orthogonaux.

Lemme 13.48

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$ et F un sous-espace vectoriel stable par u. L'orthogonal $F^{\perp}$ est encore stable par u.

Démonstration :

Soit $x \in F^{\perp}$. Montrons que $u(x) \in F^{\perp}$.

$$\forall y \in F, (u(x)|y) = (x|u(y)) = 0$$

La dernière égalité vient du fait que $x \in F^{\perp}$ et que $u(y) \in F$ car F stable par u. On a bien $F^{\perp}$ stable par u. □

Lemme 13.49

Soit $u \in \mathscr{S}(E)$. Son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbf{R}$. En particulier si $\dim E > 0$ l'endomorphisme u a au moins une valeur propre réelle.

Démonstration : Notons A la matrice de u dans une base orthonormée. On sait donc que $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. On veut montrer que χ_A est scindé sur $\mathbf{R}$. On sait qu'il est scindé sur $\mathbf{C}$ car $\mathbf{C}$ est algébriquement clos.

Maintenant si λ est une valeur propre de A (ou de u) a priori complexe. Il existe alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ non nul tel que $AX = \lambda X$. En conjuguant, on obtient $A\overline{X} = \overline{\lambda X}$. De ce fait,

$$\overline{X}^T AX = \overline{X}^T(\lambda X) = \lambda ||X||^2$$

où

$$||X||^2 = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} x_i = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0.$$

De même,

$$\overline{X}^T AX = (\overline{X}^T A)X = (\overline{X}^T A^T)X = (A\overline{X})^T X = \overline{\lambda} \overline{X}^T X = \overline{\lambda} ||X||^2$$

On en déduit que $\lambda = \overline{\lambda}$ et donc $\lambda \in \mathbf{R}$.

Ceci étant vrai pour toutes les valeurs propres, χ_A est bien scindé sur $\mathbf{R}$ □

Remarque : Il existe une autre preuve. On considère

$$f : x \mapsto (u(x)|x).$$

C'est une application continue. En effet c'est la composée de

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \times E \\ x & \longmapsto & (u(x), x) \end{array}$$

et de

$$(.|.) : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x, y) & \longmapsto & (u(x)|y) \end{array}$$

Or l'application φ est continue car linéaire (et E de dimension finie) et $(.|.)$ est continue car bilinéaire.

Maintenant, comme E est de dimension finie la sphère unité $S = \{x \in E \mid ||x|| = 1\}$ est un fermée et bornée. Elle est donc compacte.

On en déduit que f est bornée et atteint ses bornes sur S.

Soit $x_0 \in S$ tel que $f(x_0)$ soit maximale. On va montrer que x_0 est un vecteur propre de u. Ce qui revient à dire que $\mathrm{Vect}(u(x_0)) \subset \mathrm{Vect}(x_0)$ [1]. Pour montrer que ces deux espaces vectoriels coïncident on va montrer qu'ils ont le même orthogonal.

Soit h tel que $(x_0|h) = 0$. On sait que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $||x_0 + th||^2 = ||x_0||^2 + t^2||h||^2 \neq 0$ d'après le théorème de Pythagore.

On peut alors regarder la fonction

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & f\left(\frac{x_0 + th}{||x_0 + th||}\right) \end{array}$$

1. l'inclusion est là pour traiter le cas où la valeur propre serait nulle

D'après la définition de x_0, cette fonction atteint son maximum en $t = 0$. Maintenant,

$$\begin{aligned}
g(t) &= \left(u\left(\frac{x_0+th}{||x_0+th||}\right)|\frac{x_0+th}{||x_0+th||}\right) \\
&= \frac{1}{||x_0+th||^2}\,(u(x_0)+tu(h)|x_0+th) \\
&= \frac{1}{1+t^2||h||^2}\left[(u(x_0)|x_0)+t(u(x_0)|h)+t(u(h)|x_0)+t^2(u(h)|h)\right] \\
&= ((u(x_0)|x_0)+2t(u(x_0)|h)+o(t))(1+0t+o(t)) \\
&= (u(x_0)|x_0)+2t(u(x_0)|h)+o(t)
\end{aligned}$$

On en déduit que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = 2(u(x_0)|h) = 0$.
On a montré que $\mathsf{Vect}(x_0)^\perp \subset \mathsf{Vect}(u(x_0))^\perp$ ce qui implique en prenant l'orthogonal que

$$\mathsf{Vect}(u(x_0)) = (\mathsf{Vect}(u(x_0))^\perp)^\perp \subset (\mathsf{Vect}(x_0)^\perp)^\perp = \mathsf{Vect}(x_0).$$

Ce qui implique bien que x_0 est un vecteur propre.
C'est ce que l'on voulait.

Théorème 13.50 (Théorème spectral - Version endomorphisme)

Si u est un endomorphisme symétrique alors l'espace E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u. C'est-à-dire qu'il existe une base orthonormale diagonalisant u.

Démonstration : On procède par récurrence sur la dimension de E. On veut montrer que si u est un endomorphisme symétrique de E où $\dim E = n$ alors il existe une base orthonormale diagonalisant u.

- Initialisation : Pour $n = 0$, il suffit de considérer la famille vide. Pour $n = 1$, il suffit de prendre un vecteur normé engendrant l'espace.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On suppose que la propriété est vrai si $\dim E < n$ et on veut le montrer si $\dim E = n$. On sait maintenant que u admet une valeur propre réelle λ. On note alors e_1 un vecteur propre associé à λ que l'on peut supposer normé. On pose $F = \mathsf{Vect}(e_1)$ qui est stable par u. En utilisant le lemme on obtient que $F^\perp$ est stable par u. Maintenant, la restriction $\check{u}$ de u à $F^\perp$ est un endomorphisme symétrique de $F^\perp$ (avec le produit scalaire induit par celui de E). Donc il existe une base $(e_2, \ldots, e_n)$ orthonormée de $F^\perp$ qui diagonalise $\check{u}$.
  Il ne reste qu'à prendre $(e_1, \ldots, e_n)$ qui est bien orthonormée car pour tout $i \geqslant 2$, $(e_1|e_i) = 0$.

□

On peut aussi en donner une version matricielle :

Théorème 13.51 (Théorème spectral - Version matrice)

Soit A une matrice symétrique réelle. Elle est diagonalisable sur $\mathbf{R}$. De plus cette diagonalisation peut être établie par un changement de bases entre deux bases orthonormales. C'est-à-dire qu'il existe une matrice orthogonal $P \in O(n)$ telle que

$$P^{-1}AP =^t PAP = D$$

soit diagonale.

ATTENTION

On ne peut pas généraliser aux matrices symétriques complexes. Par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable car son polynôme minimal est $\mu_A = X^2$.

Remarque : La généralisation aux matrices complexes (hors programme) sont les matrices telles que $A^T = \overline{A}$.