– Préliminaire –

1) Le cours nous apprend que pour tout réel α, on a

$$\forall x \in]-1,1[,\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k$$

En choisissant $\alpha = -1/2$ et en substituant $-x$ à x, on a donc

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \ \text{ avec }\ a_1 = \frac{1}{2},\ \forall k \geqslant 1\ :\ a_{k+1} = -\frac{-\frac{1}{2}-k}{k+1} a_k = \frac{2k+1}{2(k+1)} a_k$$

On montre par récurrence que

$$\forall k \geqslant 1,\ a_k = \frac{\binom{2k}{k}}{4^k}$$

- Initialisation : c'est vrai pour $k=1$ car $\frac{\binom{2}{1}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
- Hérédité : supposons le résultat vrai pour un rang $k \geqslant 1$. On a alors

$$a_{k+1} = \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} \frac{2k+1}{2(k+1)} = \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} \frac{2k+1}{2(k+1)} = \frac{(2k+2)!}{4^k (k!)^2} \frac{1}{4(k+1)^2} = \frac{(2(k+1))!}{4^{k+1}((k+1)!)^2}$$

ce qui montre le résultat au rang $k+1$.

La formule étant encore valable au rang $k=0$ ($a_0 = 1$), on a ainsi

$$\forall x \in]-1,1[,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k$$

– Marche aléatoire –

2) Par indépendance des X_i, on a

$$P(X_{k+1} = i_1, \dots, X_n = i_{n-k}) = \prod_{j=k+1}^{n} P(X_j = i_{j-k})$$

Comme les X_i ont toutes la même loi, $P(X_j = i_{j-k}) = P(X_{j-k} = i_{j-k})$ et donc (en utilisant encore l'indépendance)

$$P(X_{k+1} = i_1, \dots, X_n = i_{n-k}) = \prod_{j=1}^{n-k} P(X_j = i_j) = P(X_1 = i_1, \dots, X_{n-k} = i_{n-k})$$

3) Par définition des S_n, on a

$$\begin{cases} S_{k+1} - S_k = j_1 \\ S_{k+2} - S_k = j_2 \\ \vdots \\ S_n - S_k = j_{n-k} \end{cases} \iff \begin{cases} X_{k+1} = j_1 \\ X_{k+1} + X_{k+2} = j_2 \\ \vdots \\ X_{k+1} + \dots + X_n = j_{n-k} \end{cases} \iff \begin{cases} X_{k+1} = j_1 \\ X_{k+2} = j_2 - j_1 \\ \vdots \\ X_n = j_{n-k} - j_{n-k-1} \end{cases}$$

On peut alors utiliser la question précédente pour en déduire que

$$P(S_{k+1} - S_k = j_1, \dots, S_n - S_k = j_{n-k}) = P(X_1 = j_1, X_2 = j_2 - j_1, \dots, X_{n-k} = j_{n-k} - j_{n-k-1})$$

On fait alors le trajt dans l'autre sens et on remarque que

$$\begin{cases} X_1 = j_1 \\ X_2 = j_2 - j_1 \\ \vdots \\ X_{n-k} = j_{n-k} - j_{n-k-1} \end{cases} \iff \begin{cases} S_1 = j_1 \\ S_2 = j_2 \\ \vdots \\ S_{n-k} = j_{n-k} \end{cases}$$

ce qui donne finalement

$$P(S_{k+1} - S_k = j_1, \dots, S_n - S_k = j_{n-k}) = P(S_1 = j_1, \dots, S_{n-k} = j_{n-k})$$

4) On remarque que $A_k^n = (S_k = 0) \cap (S_{k+1} \neq 0) \cap \dots (S_n \neq 0)$ et donc

$$P(A_k^n) = P(S_k = 0) P_{(S_k=0)}(S_{k+1} \neq 0, \dots, S_n \neq 0)$$

De façon évidente,

$$P_{(S_k=0)}(S_{k+1} \neq 0, \dots, S_n \neq 0) = P_{S_k=0}(S_{k+1} - S_k \neq 0, \dots, S_n - S_k \neq 0)$$

On remarque que les variables $S_{k+1} - S_k$, ..., $S_n - S_k$ ne dépendent que de $X_{k+1}, \dots, X_n$ et sont donc indépendantes de S_k qui ne dépend que de $X_1, \dots, X_k$ (et puisque les X_i sont, elles, indépendantes). On a donc, d'après le lemme des coalitions,

$$P_{(S_k=0)}(S_{k+1} \neq 0, \dots, S_n \neq 0) = P(S_{k+1} - S_k \neq 0, \dots, S_n - S_k \neq 0)$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} P(S_{k+1} - S_k \neq 0, \dots, S_n - S_k \neq 0) &= P\left(\bigcup_{j_1, \dots, j_{n-k} \neq 0} (S_{k+1} - S_k = j_1, \dots, S_n - S_k = j_{n-k}) \right) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_{n-k} \neq 0} P\left(S_{k+1} - S_k = j_1, \dots, S_n - S_k = j_{n-k}\right) \end{aligned}$$

la dernière égalité provenant de l'incompatiblité des événements. La question précédente donne alors

$$P(S_{k+1} - S_k \neq 0, \dots, S_n - S_k \neq 0) = \sum_{j_1, \dots, j_{n-k} \neq 0} P\left(S_1 = j_1, \dots, S_{n-k} = j_{n-k}\right)$$

et en refaisant le chemin dans l'autre sens

$$P(S_{k+1} - S_k \neq 0, \dots, S_n - S_k \neq 0) = P(S_1 \neq 0, \dots, S_{n-k} \neq 0)) = P(E_{n-k})$$

Finalement, on trouve que

$$P(A_k^n) = P(S_k = 0) P(E_{n-k})$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\omega \in \Omega$; comme $S_0(\omega) = 0$, il existe un plus grand $k \in [|0, n|]$ tel que $S_k(\omega) = 0$ et on a alors $\omega \in A_k^n$. La réunion des parties $A_0^n, \dots, A_n^n$ est donc égale à Ω. Ces parties étant disjointes, on a donc

$$1 = \sum_{k=0}^{n} P(A_k^n) = \sum_{k=0}^{n} P(S_k = 0) P(E_{n-k})$$

6) $\sum(P(S_n = 0)x^n)$ et $\sum(P(E_n)x^n)$ étant des séries entières de rayon de convergence au moins égal à 1 ($|P(E_n)x^n| \leqslant 1$ si $|x| \leqslant 1$). On peut donc utiliser le théorème sur le produit de Cauchy et écrire que pour $x \in]-1, 1[$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} P(E_n) x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n \quad \text{avec} \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} P(S_k = 0) P(E_{n-k})$$

Avec la question précédente, on a donc

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = 0) x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} P(E_n) x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

7) $S_n(\omega)$ est la somme de n quantités valant 1 ou -1 et ne peut donc être nul que s'il y a autant de 1 que de -1, c'est à dire que si n est pair. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ P(S_{2n+1} = 0) = 0$$

Supposons maintenant n pair et écrivons que $n = 2p$. La valeur de $S_n(\omega)$ ne dépend que des valeurs de $\omega_1, \dots, \omega_{2p}$. Il y a $2^{2p} = 4^p$ choix pour ces valeurs et on a

$$P(S_{2p} = 0) = \frac{\alpha_p}{4^p}$$

où α_p est le nombre de uplets $(\omega_1, \dots, \omega_{2p})$ contenant autant de 1 que de -1. Choisir un tel uplet, c'est choisir la position des 1 et il y a $\binom{2p}{p}$ tels choix. On a donc

$$P(S_{2p} = 0) = \frac{\binom{2p}{p}}{4^p}$$

8) On en déduit que pour $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0)x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\binom{2p}{p}}{4^p} x^{2p} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et donc que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n)x^n = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

9) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(T = n) = (T > n-1) \setminus (T > n)$. On en déduit que $P(T = n) = P(E_{n-1}) - P(E_n)$.
On note de plus que comme la suite $(P(T = n))_{n \geqslant 1}$ est bornée, la série entière $\sum P(T = n)x^n$ a un rayon de convergence au moins égal à 1 et, pour $x \in [0,1[$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = n)x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} (P(E_{n-1}) - P(E_n))x^n \\
&= x\sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n))x^n \\
&= x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1\right) \text{ car } P(E_0) = 1 \\
&= 1 - \sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

10) D'après la formule démontrée à la question précédente, il est clair, par unicité du développement en série entière que pour n impair $P(T = n) = 0$.
En divisant par x on a alors que pour tout $x \in]0,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(T = 2n)x^{2n-1} = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}.$$

En dérivant les deux termes,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)P(T = 2n)x^{2n-2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right).$$

En posant alors encore $a_n = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ en en utilisant la question 1, on obtient que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (2n-1)P(T = 2n)x^{2n-2} = \frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n}.$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient finalement que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$P(T = 2n) = \frac{1}{2n-1}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}.$$

11) On a en utilisant la formule de Stirling

$$\begin{aligned}
P(T = 2n) &= \frac{1}{2n-1}\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \\
&\sim \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{2n \times 4^n n^{2n} e^{-2n} 2\pi n} \\
&\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}.
\end{aligned}$$

On a alors pour $n > 0$,

$$P(E_n) - P(T = \infty) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(T = k) = \sum_{p=p_0}^{+\infty} P(T = 2p)$$

où $p_0 = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$. Par sommation des relations de comparaison pour les séries positives convergentes (la série ci-dessus converge, par exemple en utilisant l'équivalent trouvé ci-dessus),

$$P(E_n) - P(T = \infty) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sum_{p=p_0}^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi} p^{3/2}}.$$

En utilisant une comparaison série intégrale, on obtient que

$$\sum_{p=p_0}^{+\infty} \frac{1}{p^{3/2}} \underset{p_0 \to +\infty}{\sim} \frac{2}{\sqrt{p_0}}.$$

Or $p_0 \sim \frac{n}{2}$ donc finalement :

$$P(E_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \text{ si } P(T = \infty) = 0$$

$$P(E_n) \underset{n \to +\infty}{\sim} P(T = \infty) \text{ sinon}$$

12) Par la question 9), on a :

$$\forall x \in [0, 1[,\ 1 - \sqrt{1 - x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} P(T = n) x^n$$

Or la série entière $\sum (x \mapsto P(T = n)x^n)$ converge normalement sur $[-1, 1]$ car la série numérique $\sum ||x \mapsto P(T = n)x^n||_{\infty, [-1,1]} = \sum P(T = n)$ converge. Sa fonction somme f est donc continue sur $[-1, 1]$. On a donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(T = n) = f(1) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 1 - \sqrt{1 - x^2} = 1$$

et ainsi

$$P(T = \infty) = 0$$