I - Étude d'une suite récurrente

1) a) Commençons par noter que, comme $[0,1]$ est stable par f et que $u_0 = 0 \in [0,1]$, la suite (u_n) est bien définie et à valeurs dans $[0,1]$. Maintenant, comme f' est positive, f croit sur $[0,1]$. Montrons alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$$

- Initialisation : c'est vrai au rang 0 car $u_0 = 0$ et $u_1 = f(0) \in [0,1]$.
- Hérédité : soit $n \geqslant 0$ tel que le résultat est vrai jusqu'au rang n. On a alors $u_n \leqslant u_{n+1}$ et par croissance de f sur $[0,1]$, $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) = u_{n+2}$. On a ainsi prouvé le résultat au rang $n+1$.

On a montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle reste dans $[0,1]$. Par théorème de limite monotone, la suite converge et de plus (passage à la limite dans une inégalité large)

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n \in [0,1]$$

b) Comme $f(1) = 1$, l'ensemble $A = \{x \in [0,1] / \ f(x) = x\}$ est non vide. Comme il est minoré (par 0), il admet une borne inférieure x_f. Soit (x_n) une suite d'élément de A tendant vers x_f, on a pour tout entier n, $f(x_n) = x_n$. En passant à la limite (la fonction f est continue), on obtient que $f(x_f) = x_f$. Finalement $x_f \in A$. Il y a donc bien une plus petite solution à l'équation $f(x) = x$.

c) Comme f croît sur $[0,1]$, on a $f([0,x_f]) = [f(0), f(x_f)] = [0, x_f]$. C'est-à-dire que $[0,x_f]$ est stable par f. Comme $u_0 \in [0,x_f]$, par recurrence, on obtient que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,x_f]$.

Par passage à la limite, $\ell \in [0,x_f]$. Or, f étant continue sur $[0,1]$, un passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ donne de plus $f(\ell) = \ell$. Enfin, par minimalité, x_f est le seul point fixe de f dans $[0,x_f]$. On a donc $\boxed{x_f = \ell}$.

2) On suppose que $m > 1$. Supposons par l'absurde que $x_f = 1$. Cela implique que la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ ne s'annule pas sur $[0,1[$. Comme elle est continue, elle garde un signe constant. Comme de plus $g(0) = f(0) > 0$ (car $f(0) \in [0,1]$ et $f(0) \neq 0$), on obtient que pour tout $x \in [0,1[$, $g(x) \geqslant 0$ et donc $f(x) \geqslant x$. Dès lors, pour tout $x \in [0,1[$,

$$\frac{f(1)-f(x)}{1-x} = \frac{1-f(x)}{1-x} \leqslant \frac{1-x}{1-x} = 1$$

En passant à la limite pour $x \to 1^-$ on obtient que $m = f'(1) \leqslant 1$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Finalement, $x_f \in [0,1[$.

3) Notons toujours $g : x \mapsto f(x) - x$. On a $g \in \mathscr{C}^2([0,1])$ et $g' : x \mapsto f(x) - 1$, $g'' : x \mapsto f''(x) \geqslant 0$; comme $g''(1) = f''(1) > 0$, g'' (qui est continue) est même strictement positve sur un intervalle $[a,1[$ où $a \in [0,1[$. De ce fait, g' est croissante sur $[0,1]$ et strictement croissante sur $[a,1]$. Comme $g'(1) = m - 1 \leqslant 0$, g' est strictement négative sur $[a,1[$ et même sur $[0,1[$. La fonction g est donc strictement décroissante sur $[0,1]$. En particulier, $\forall x \in [0,1[,\ g(x) > g(1) = 0$. La fonction g ne s'annule donc pas sur $[0,1[$ et ceci implique que $\boxed{x_f = 1}$.

Supposons qu'il existe $\alpha < 1$ tel que $f(\alpha) = 1$. Comme f est croissante (car f' positive) et que $f(1) = 1$ cela implique que f est constante égale à 1 sur $[\alpha, 1]$. On en déduit que $f''(1) = 0$ ce qui est contraire aux hypothèses. On a donc montré que $f(x) = 1 \Rightarrow x = 1$. Si, par l'absurde, il existait n tel que $u_n = 1$, on aurait $f(u_{n-1}) = 1$ et donc $u_{n-1} = 1$. Par une récurrence descendante, on obtiendrait $u_0 = 1$, ce qui est faux. Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1[}$.

4) Dans cette question, on suppose $m = 1$.

a) Comme $m=1$, $\ell=1$ d'après les questions précédentes. On a $u_n = 1-\varepsilon_n$ et $\varepsilon_n \to 0$. Par formule de Taylor-Young,

$$u_{n+1} = f(u_n) = f(1-\varepsilon_n) = f(1) - \varepsilon_n f'(1) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n^2) = 1 - \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n^2)$$

On en déduit que

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n^2) = \varepsilon_n \left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n)\right)$$

On passe à l'inverse (possible puisque la suite (ε_n) ne s'annule pas) et en utilisant $\frac{1}{1-u} = 1 + u + o_0(u)$ on trouve

$$\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{\varepsilon_n}\left(1 + \frac{\varepsilon_n}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n)\right)$$

Il en résulte que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n}\right) = \frac{f''(1)}{2}$$

b) On pose $v_n = \frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n}$ qui est une suite positive telle que $v_n \sim \dfrac{f''(1)}{2}$. Par sommation des équivalents pour les séries divergentes, on a pour $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{\varepsilon_n} - \frac{1}{\varepsilon_0} = \sum_{k=0}^{n-1} v_k \sim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f''(1)}{2} = \frac{n f''(1)}{2}.$$

Le terme en $\frac{1}{\varepsilon_0}$ est négligeable donc, en prenant l'inverse, $1 - u_n = \varepsilon_n \sim \dfrac{2}{n f''(1)}$.

5) On suppose maintenant $m<1$ et on pose encore, pour $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1 - u_n$.

a) Le même calcul que ci-dessus donne

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \left(m - \frac{\varepsilon_n}{2} f''(1) + o(\varepsilon_n)\right)$$

On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|\varepsilon_{n+1}|}{|\varepsilon_n|} = |m| = m \in [0,1[$$

Par règle de D'Alembert, $\sum(\varepsilon_n)$ est donc absolument convergente.
Notons que le cas $m=0$ est impossible. On peut donc diviser par $m>0$. En reprenant l'identité ci-dessus, on a

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n} = 1 - \frac{\varepsilon_n}{2m} f''(1) + o(\varepsilon_n)$$

On en déduit que

$$\ln\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n}\right) = O\left(\varepsilon_n\right)$$

qui est le terme général d'une absolument convergente. On a montré que

$$\ln\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n}\right) = \ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right)$$

est le terme général d'une série absolument convergente.

b) Notons L la somme de la série de la question précédente. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{\varepsilon_{k+1}}{m\varepsilon_k}\right) = L + o(1)$$

Avec les propriétés de morphisme du logarithme, les termes se télescopent et on obtient

$$\ln(\varepsilon_n) - \ln(\varepsilon_0) - n\ln(m) = L + o(1)$$

ou encore

$$\varepsilon_n = m^n e^L \varepsilon_0 e^{o(1)}$$

Comme $e^L\varepsilon_0 > 0$ (ce qui importe est la non nullité) on a finalement

$$1 - u_n = \varepsilon_n \sim cm^n \quad \text{avec} \quad c = e^L\varepsilon_0 > 0$$

II - Formule de Wald

6) On souhaite démontrer l'égalité $G_S = G_T \circ G_X$.

a) Les variables X_n sont mutuellement indépendantes donc, d'après le cours, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $G_{S_k} = (G_X)^k$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$, T et S_n sont indépendantes d'après le lemme des coalitions.
Pour tout entier n,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(S = n) = \sum_{k=0}^{\infty} P((S = n) \cap (T = k))$$

car $(T = k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements.
On en déduit que

$$\forall t \in [-1, 1],\ G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S = n)t^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} P((S = n) \cap (T = k))t^n\right)$$

Comme on a l'égalité des événements $(S = n) \cap (T = k)$ et $(S_k = n) \cap (T = k)$ et comme S_k et T sont indépendantes, on a alors

$$\forall t \in [-1, 1],\ G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} P(S_k = n)P(T = k)t^n\right)$$

La famille $(P(S_k = n)P(T = k)t^n)_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable d'après le théorème de sommation par paquets car :

— Pour tout entier n, la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} P(S_k = n)P(T = k)|t|^n$ converge

— La série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(S_k = n)P(T = k)|t|^n$ converge.

On peut intervertir les deux sommes. On obtient pour $t \in [-1, 1]$,

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(T = k)\left(\sum_{n=0}^{\infty} P(S_k = n)t^n\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P(T = k)G_{S_k}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(T = k)(G_X(t))^k$$

On obtient finalement,

$$G_S(t) = G_T(G_X(t))$$

7) Si les X_n sont d'espérance finie alors G_X est dérivable en 1. Si T est d'espérance finie alors G_T est dérivable en $1 = G_X(1)$ donc $G_T \circ G_X$ est dérivable en 1 et donc G_S aussi. Cela implique que S est d'espérance finie et que :

$$\mathsf{E}(S) = (G_S)'(1) = (G_X)'(1).(G_T)'(G_X(1)) = (G_X)'(1).(G_T)'(1) = \mathsf{E}(T)\mathsf{E}(X_1).$$

III - Processus de Galton-Watson

8) **Probabilité d'extinction**

a) On fixe $n \in \mathbb{N}$. On est exactement dans la situation de la partie précédente. Ici, $T = Y_n$ et les X_i sont les $X_{n,i}$. La variable Y_{n+1} correspond alors à S et donne (toutes les hypothèses d'indépendance étant vérifiées)

$$\varphi_{n+1} = G_{Y_{n+1}} = G_{Y_n} \circ G_{X_{n,1}} = \varphi_n \circ f$$

b) De même, en utilisant 7) on a $\mathsf{E}(Y_{n+1}) = \mathsf{E}(Y_n)\mathsf{E}(f)$. et (on a une suite géométrique)

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathsf{E}(Y_n) = \mathsf{E}(f)^n\mathsf{E}(Y_0) = m^n$$

c) Commençons par voir que $\varphi_n(0) = G_{Y_n}(0) = P(Y_n = 0)$.
L'événement E : « il y a extinction » est égal à les réunion des événements $(Y_n = 0)$ (il y a extinction si la population devient nulle a une génération) :

$$E = \bigcup_{n=0}^{\infty}(Y_n = 0)$$

Les événements $(Y_n = 0)$ étant emboîtés, on peut utiliser la continuité croissante pour en déduire que

$$P(E) = \lim_{n\to+\infty} P(Y_n = 0) = \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(0)$$

d) D'après la question 8.a) et $\varphi_0 = \mathrm{Id}$, une récurrence immédiate montre que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi_n = f^{(n)}$$

où $f^{(n)}$ désigne l'itérée n fois de f pour la composition (avec la convention $f^{(0)} = \mathrm{Id}$). En particulier

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi_{n+1}(0) = f(f^{(n)}(0)) = f(\varphi_n(0))$$

et $(\varphi_n(0))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence de la partie **I**. Il nous reste à montrer que la fonction f vérifie les hypothèses de cette partie.

- f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ puisque l'on a suppose que la loi μ possède une espérance et une variance. De plus, f' et f'' sont à valeurs positives puisque

$$\forall t \in [0,1],\ f'(t) = \sum_{k\geqslant 0}(k+1)p_{k+1}t^k \quad \text{et} \quad f''(t) = \sum_{k\geqslant 0}(k+1)(k+2)p_{k+2}t^k$$

- f est définie de $[0,1]$ dans $[0,1]$ ($\forall t \in [0,1],\ 0 \leqslant f(t) = \sum_{k\geqslant 0} p_k t^k \leqslant \sum_{k\geqslant 0} p_k = 1$).
- $f(1) = \sum_{k\geqslant 0} p_k = 1$.
- $f'(0) = p_1 \leqslant p_0 + p_1 < 1$.
- $f''(1) = \sum_{k\geqslant 0}(k+1)(k+2)p_{k+2} > 0$ car l'un des p_{k+2} est > 0.

e) Si $m \leqslant 1$ alors $\varphi_n(0) \to 1$ d'après la question 3). La population s'éteint donc presque sûrement.

9) L'énoncé semble admettre que pour tout entier n, Y_n est une variable aléatoire discrète. Justifions le quand-même. Commençons par remarquer pour tout entier naturel n et tout entier $N \geqslant 1$, $\sum\limits_{i=1}^{N} X_{n,i}$ est une variable aléatoire discrète comme somme d'un nombre fini de variables aléatoires discrètes. Notons là $Z_{n,N}$. Par convention $Z_{n,0}$ est la variable nulle.

Maintenant, on sait par hypothèses de Y_0 est une variable aléatoire discrète (c'est la variable certaine). Supposons que pour un entier n, Y_n soit une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et montrons qu'il en est de même pour Y_{n+1}. Il est clair pour commencer que $Y_{n+1}(\Omega) \subset \mathbb{N}$. De plus, pour $k \in \mathbb{N}$,

$$(Y_{n+1} = k) = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} ((Y_n = N) \cap (Z_{n,N} = k))$$

Comme Y_n et $Z_{n,N}$ sont des variables aléatoires discrètes, $(Y_{n+1} = k)$ appartient à $\mathscr{A}$ comme union dénombrable d'éléments de $\mathscr{A}$.

Passons à T. Par définition $T(\Omega) \subset \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. De plus

— pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $(T = n) = \left(\bigcap\limits_{i=0}^{n-1} (Y_i > 0)\right) \cap (Y_n = 0)$

— $(T = +\infty) = \bigcap\limits_{i=0}^{+\infty} (Y_i > 0)$

Dans les deux cas, on obtient un élément de $\mathscr{A}$ comme intersection au plus dénombrable d'éléments de $\mathscr{A}$.

On a bien montré que T était une variable aléatoire discrète.

10) **Cas sous-critique** $m < 1$

On suppose dans cette question que $m < 1$.

a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si $T(\omega) = k$ alors $Y_{k-1}(\omega) \neq 0$ et $Y_k(\omega) = 0$. En particulier $(T = k) \subset (Y_{k-1} \neq 0)$ et donc

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant P(T = k) \leqslant P(Y_{k-1} \neq 0) = 1 - P(Y_{k-1} = 0) = 1 - \varphi_{k-1}(0)$$

On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant kP(T = k) \leqslant k(1 - \varphi_{k-1}(0))$$

D'après la question 5.b) (on est bien dans le cas $m < 1$), $k(1 - \varphi_{k-1}(0)) \sim ckm^{k-1}$ est le terme général d'une série convergente (par comparaison aux séries de Riemann puisque ce terme est $o(1/k^2)$ puisque $m \in [0, 1[$). A fortiori, $kP(T = k)$ est aussi le terme général d'une série convergente (comparaison de séries positives) et $\mathsf{E}(T)$ existe

b) Pour tout entier n, comme Y_n est à valeurs positives, on peut utiliser l'inégalité de Markov :

$$P(Y_n \geqslant 1) \leqslant \frac{\mathsf{E}(Y_n)}{1} = m^n.$$

c) On est dans le cas où la population s'éteint presque sûrement et on a donc $P(T = -1) = 0$. Ainsi

$$\mathsf{E}(T) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(T = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k-1} P(T = k)$$

Cela signifie que la famille $(u_{i,k})_{(i,k) \in \mathbb{N}^2}$ définie par

$$u_{i,k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geqslant k \\ P(T = k) & \text{si } i < k \end{cases}$$

est sommable. De ce fait,

$$\mathsf{E}(T) = \sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{k=i+1}^{\infty} P(T = k) = \sum_{i=0}^{\infty} P(T > i).$$

d) On utilise que $P(T > k) = P(Y_k \geqslant 1) \leqslant m^k$ pour en déduire que

$$\mathsf{E}(T) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} m^k = \frac{1}{1 - m}$$