Dans ce problème, nous étudions le processus de Galton-Watson qui permet entre autres de modéliser le développement d'une population. Ce processus est par exemple utilisé en biologie ou en physique nucléaire. Dans tout le problème, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Si X est une variable aléatoire entière et positive sur cet espace, on notera G_X, série entière de rayon de convergence au moins 1, la fonction génératrice de X. On rappelle que la fonction génératrice de X est la somme de la série entière :

$$\forall t \in [-1,1],\ G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n)t^n$$

I - Étude d'une suite récurrente

On considère une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$ à valeurs dans $[0,1]$ telles que f' et f'' soient à valeurs positives. On suppose $f(1)=1$, $f'(0)<1$ et $f''(1)>0$.
On considère de plus la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dénie par $u_0=0$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$. On pose $m=f'(1)$.

1) a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, puis qu'elle est convergente. On note ℓ sa limite.
   b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une plus petite solution. Dans toute la suite, on la notera x_f.
   c) Montrer que $\ell = x_f$.
2) On suppose $m>1$. Montrer que $x_f\in[0,1[$.
3) On suppose maintenant $m\leqslant 1$. Montrer que $x_f=1$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\neq 1$.
4) Dans cette question, on suppose $m=1$.
   a) On pose, pour $n\in\mathbb{N}$, $\varepsilon_n = 1-u_n$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\varepsilon_{n+1}}-\frac{1}{\varepsilon_n}\right)=\frac{f''(1)}{2}$.
   b) En déduire que, quand n tend vers l'infini, $1-u_n=\varepsilon_n\sim\dfrac{2}{nf''(1)}$.
5) On suppose maintenant $m<1$ et on pose encore, pour $n\in\mathbb{N}$, $\varepsilon_n=1-u_n$.
   a) Montrer que la série de terme général ε_n est absolument convergente et en déduire la convergence de celle de terme général $\ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right)$.
   b) En déduire qu'il existe $c>0$ tel que, quand n tend vers $+\infty$, $1-u_n\sim cm^n$.

II - Formule de Wald

Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que T et les X_n sont mutuellement indépendantes.
On note G_X la fonction génératrice commune à toutes les X_n.
Pour $n\in\mathbb{N}$ et $\omega\in\Omega$, on pose $S_n(\omega)=\sum\limits_{k=1}^{n}X_k(\omega)$ et $S_0(\omega)=0$, puis $S(\omega)=S_{T(\omega)}(\omega)$.

6) a) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $G_{S_k}=(G_X)^k$.
   b) Justifier que pour tout $n\in\mathbb{N}$, T et S_n sont indépendantes et montrer soigneusement que
$$\forall t\in[-1,1],\ G_S(t)=\sum_{k\in\mathbb{N}}G_X(t)^kP(T=k)=G_T\Big(G_X(t)\Big)$$
7) En déduire que, si T et les X_n sont d'espérance finie, alors S aussi et $\mathsf{E}(S)=\mathsf{E}(T)\mathsf{E}(X_1)$.

III - Processus de Galton-Watson

Soit μ une loi de probabilité caractérisée par la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de nombre réels entre 0 et 1 telle que $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.
Dire qu'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suit la loi μ signifie que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$ $P(X = k) = p_k$.
On suppose que $p_0 + p_1 < 1$ (ce qui signifie qu'il existe au moins un entier k supérieur ou égal à 2 tel que $p_k \neq 0$).
On étudie un individu qui a un certain nombre de fils. Ces fils ont également chacun (indépendamment les uns des autres) un certain nombre de fils et ainsi de suite. Afin de modéliser la situation, on se donne une famille de variables aléatoires $(X_{n,i})_{(n,i)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes qui suivent toutes la loi μ, on pose Y_0 la variable certaine égale à 1 et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$, $Y_{n+1}(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{Y_n(\omega)} X_{n,i}(\omega)$. En particulier, si $Y_n(\omega) = 0$ alors $Y_{n+1}(\omega) = 0$.
De ce fait, Y_n représente le nombre d'individus à la génération n.
S'il n'y a pas d'individu à la génération n, il n'y en a pas plus à la génération suivante et sinon, le nombre de fils du i-ème élément de la génération n est égal à $X_{n,i}$.
On dit qu'il y a extinction lorsqu'il existe un entier n tel que $Y_n = 0$.
On note f la fonction génératrice de la loi μ (et donc de chacune des variables $X_{n,i}$) et, pour $n \in \mathbb{N}$, φ_n la fonction génératrice de la variable aléatoire Y_n.
On a donc en particulier, pour $t \in [0,1]$, $\varphi_0(t) = t$.
On suppose que toute variable aléatoire suivant la loi μ possède une espérance égale à m et une variance notée σ^2.

8) **Probabilité d'extinction**
   a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ f$.
   b) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'espérance de Y_n en fonction de m et de n.
   c) Vérifier que la probabilité d'extinction est égale a la limite de la suite $(\varphi_n(0))_{n\geqslant 0}$.
   d) Vérifier qu'on peut appliquer les résultats de la partie **I** à la suite $(\varphi_n(0))_{n\geqslant 0}$.
   e) Si $m \leqslant 1$, montrer que la probabilité d'extinction est égale à 1.

On définit alors le temps T d'extinction par

$$\forall \omega \in \Omega,\ T(\omega) = \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N} /\ Y_n(\omega) = 0\} & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } Y_n(\omega) = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

9) Montrer que T est une variable aléatoire discrète.
10) **Cas sous-critique** $m < 1$
   On suppose dans cette question que $m < 1$.
   a) Vérifier que T admet une espérance.
   b) Montrer que, pour tout entier n, $P(Y_n \geqslant 1) \leqslant m^n$.
   c) Montrer que $\mathsf{E}(T) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} P(T > k)$.
   d) En déduire une majoration de $\mathsf{E}(T)$.