Exercice I

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. On note $||.||$ sa norme. On considère une partie H de E.
On dit que $x \in E$ est une combinaison convexe des p éléments $x_1, \ldots, x_p \in E$ s'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ positifs ou nuls tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1.$$

1) Montrer que l'ensemble $\mathsf{Conv}(\mathrm{H})$ des combinaisons convexes d'éléments de H est convexe et qu'il est inclus dans toute partie convexe de E qui contient H.

On appellera dans la suite *enveloppe convexe* de H cette partie de E.

2) On suppose dans cette question que E est de dimension finie et on note $n = \dim E$. On souhaite montrer que $\mathsf{Conv}(\mathrm{H})$ est l'ensemble des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H. On considère $x = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ une combinaison convexe de $x_1, \ldots, x_p \in H$ où $p \geqslant n+2$.
   a) En considérant la famille $(x_2 - x_1, x_3 - x_1, \ldots, x_p - x_1)$, montrer qu'il existe p réels non tous nuls $\mu_1, \ldots, \mu_p$ tels que

   $$\sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{p} \mu_i = 0.$$

   b) En déduire que x s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $p-1$ éléments de H et conclure que $\mathsf{Conv}(\mathrm{H})$ est constituée des combinaisons convexes d'au plus $n+1$ éléments de H. On pourra considérer une suite de coefficients de la forme $\lambda_i - \theta\mu_i \geqslant 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$ pour un réel θ bien choisi.

3) a) Montrer que l'ensemble

   $$\Delta = \left\{ (t_1, \ldots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \ , \ \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1 \right\}$$

   est une partie compacte de $\mathbb{R}^{n+1}$.
   b) En déduire que si E est de dimension finie et si H est compact alors $\mathsf{Conv}(\mathrm{H})$ est encore compact.

Exercice II

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une norme $||.||$.

1) Soit F un sous-espace de dimension finie de E. Soit $x \in E \setminus F$. On pose $\delta = d(x, F)$. On rappelle que δ est le plus grand minorant de l'ensemble $\{d(x, f) \ , \ f \in F\}$. Il se peut que δ n'appartienne pas à cet ensemble.
   a) Montrer que $\delta > 0$.
   b) Montrer qu'il existe un élément f de F tel que $||x - f|| \leqslant 2\delta$.
   c) On pose $u = \dfrac{x - f}{||x - f||}$. Montrer que $d(u, F) \geqslant \frac{1}{2}$.
2) On suppose E de dimension infinie. On note $B = \mathcal{B}_f(0_E, 1)$ la boule unité fermée de $(E, ||.||)$. En déduire que B n'est pas compacte.