Soit d un entier strictement positif. On note $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille d et I_d désigne la matrice identité. On appelle commutateur de A et B la matrice

$$[A,B] = AB - BA.$$

I - Préliminaire

On se fixe une norme N sur l'ensemble $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes et on note
$S = \{X \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R}) \mid N(X) = 1\}$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$. Justifier que la fonction $\theta : X \mapsto N(AX)$ admet un maximum quand $X \in S$.

On pose alors

$$||A|| = \max_{X\in S} N(AX)$$

2. Montrer que $||.||$ est une norme sur $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$.
3. Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, $N(AX) \leq ||A||N(X)$ et en déduire que pour A et B dans $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$, $||AB|| \leq ||A||.||B||$

Dans toute la suite, on considère une telle norme $||.||$ sur $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$.

– II –

4. Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ qui converge vers $D \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$. Elle est donc bornée et on note $\lambda > 0$ tel que pour tout entier n, $||D_n|| \leq \lambda$.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose pour $n \geq k$ et $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{n!}{(n-k)!n^k}$. Montrer que $(u_n)_{n\geq k}$ tend vers 1 et que
   $$0 \leq 1 - u_n \leq 1.$$
   (b) En déduire que pour $n \geq 1$,
   $$\left|\left|\left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}D_n^k\right|\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} - \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n$$
   puis que
   $$\lim_{n\to+\infty} \left(\left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}D_n^k\right) = 0.$$
   (c) Montrer que pour $k \geq 1$ et $n \geq 0$,
   $$||D_n^k - D^k|| \leq k\lambda^{k-1}||D_n - D||.$$
   On pourra procéder par récurrence.
   (d) Conclure que $\left(I_d + \dfrac{D_n}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \exp(D)$.
5. Montrer qu'il existe une constante $\mu > 0$ telle que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ telle que $||M|| \leq 1$
   $$||\exp(M) - I_d - M|| \leq \mu||M||^2.$$
6. Soit A, B deux matrices de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que pour tout entier n non nul il existe une matrice C_n telle que
   $$\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right) = I_d + \frac{A}{n} + \frac{B}{n} + C_n$$
   et que $||C_n|| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   (b) En déduire que
   $$\exp(A+B) = \lim_{n\to+\infty}\left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n.$$