Problème I

Partie I - Convergence au sens d'Abel

1) a) On considère $(a_n) = ((-1)^n)_{n\geqslant 0}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la suite $(a_n x^n)$ est bornée si et seulement si $|x| \leqslant 1$. Donc le rayon de convergence est $R = 1$. La somme est alors donnée par $\boxed{f_A : x \longmapsto \frac{1}{1+x}}$.

b) Pour $x \in]-1, 1[$, la suite $(-1)^n(n+1)x^n$ tend vers 0 par croissance comparée, elle est donc bornée d'où $R \geqslant 1$. Par contre, pour $x = 1$, la suite $(-1)^n(n+1)1^n$ n'est pas bornée d'où $R \leqslant 1$. Cela montre que $R = 1$.
On a vu ci-dessus, que la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}((-1)^n x^n)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$.
On peut dériver terme à terme et on obtient que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$-\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n$$

En multipliant par -1 on voit que la fonction somme de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}((-1)^n(n+1)x^n)$ est donnée par $\boxed{f_A : x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x)^2}}$

c) On considère $(a_n) = \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!}\right)$. Pour $x > 0$, $0 \leqslant |a_n x^n| \leqslant \dfrac{|x|^n}{(2n)!} \leqslant \dfrac{|x|^n}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
En particulier la suite $(a_n x^n)$ est convergente (vers 0) donc elle est bornée. Cela montre que le rayon de convergence est égal à $+\infty$. En notant f sa somme, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\sqrt{x})^{2n}}{(2n)!} = \cos(\sqrt{x})$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_-,\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{-x})^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch}(\sqrt{-x})$$

2) L'ensemble $\mathscr{D}$ est inclus dans l'espace des suites à valeurs réelles, montrons qu'il en est un sous-espace vectoriel.

- L'ensemble $\mathscr{D}$ n'est pas vide car la suite nulle en est un élément (le rayon de convergence est infini).
- Soit (a_n), (b_n) deux suites de $\mathscr{D}$, α, β deux réels. 0n appelle R_1 et R_2 les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0}(a_n x^n)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}(b_n x^n)$. On pose $(c_n) = (\alpha a_n + \beta b_n)$. Par opération (combinaison linéaire) sur les séries entières, on sait que $\sum\limits_{n\geqslant 0}(c_n x^n)$ est une série entière de rayon de convergence $R \geqslant \min\{R_1, R_2\} \geqslant 1$, car $R_1 \geqslant 1$ et $R_2 \geqslant 1$ par hypothèse.
Ainsi $(c_n) = \alpha(a_n) + \beta(b_n)$ est dans $\mathscr{D}$, qui est bien un sous-espace vectoriel.

Montrons maintenant que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}$. On sait que l'ensemble des suites telles que la série associée converge est un espace vectoriel. Il suffit donc de montrer que $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$.

Soit $(a_n) \in \mathscr{C}$. La série de terme général $a_n = a_n\ 1^n$ converge, on a nécessairement $1 \leqslant R$, où R est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}(a_n x^n)$. Donc $(a_n) \in \mathscr{D}$.

3) - Le rayon de convergence des séries entières des cas 1) a), b), c) est respectivement 1, 1, $+\infty$, ils sont tous supérieurs à 1.

- La limite en 1^- des fonctions sommes des séries entières des cas 1) a), b), c) est respectivement $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\cos(1)$, elles sont toutes finies.

  Donc $\boxed{\text{les trois séries converge au sens d'Abel}}$

- Les deux premières séries sont grossièrement divergentes, la troisième converge et est de somme usuelle $S(A) = \cos(1) = S_{Abel}(A)$ car la série entière converge en tout point de $\mathbb{R}$!

Ainsi, les exemples a) et b) montrent que ces deux notions de convergence ne coïncident pas.

4) a) Soit $x \in [0, 1[$. La série de terme général $a_n x^x$ est à termes positifs, sa suite des sommes partielles converge en croissant vers sa somme, ainsi, pour tout N dans $\mathbb{N}$: $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k \leqslant f_A(x)$.

b) On a donc, pour tout N dans $\mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k \leqslant f_A(x)$.

Par passage à la limite dans cette somme **finie** quand $x \to 1^-$, on a $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k \leqslant S_{Abel}(A)}$

La série $\sum(a_n)$ étant à termes positifs et la suite de ses sommes partielles étant majorée par $S_{Abel}(A)$, cette série converge et sa somme $S(A)$ étant le plus petit majorant de la suite des sommes partielles (car cette suite croît) : $\boxed{S(A) \leqslant S_{Abel}(A)}$

c) Pour tout $x \in [0, 1[$, $f_A(x) \leqslant S(A)$ car $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n x^n \leqslant a_n$. Par passage aux limites quand $x \to 1^-$, $S_{Abel}(A) = \lim\limits_{1^-} f_A \leqslant S(A)$.

Donc $S(A) = S_{Abel}(A)$.

5) a) La série entière associée à A a pour rayon de convergence au moins 1, la fonction f_A est continue sur $[0, 1[$. Comme elle admet de plus une limite finie en 1^-, à savoir $S_{Abel}(A)$, elle est prolongeable par continuité en 1^-.

Ainsi $|f_A|$ est bien intégrable sur $[0, 1[$.

b) Vérifions les axiomes des normes :

- La fonction $||.||$ est à valeurs positives.
- Soit $A \in \mathscr{A}$ telle que $||A|| = 0$. Alors comme $|f_A|$ est positive, continue et d'intégrale nulle sur $[0, 1[$, elle est nulle sur cet intervalle.

  Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, A est la suite nulle.
- Soit $A, B \in \mathscr{A}^2$. Alors $f_{A+B} = f_A + f_B$ d'où :

  $||A + B|| = \int_0^1 |f_A + f_B| \leqslant \int_0^1 |f_A| + |f_B| = \int_0^1 |f_A| + \int_0^1 |f_B| = ||A|| + ||B||$.
- pour $A \in \mathscr{A}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f_{\lambda A} = \lambda f_A$ d'où

$$||\lambda A|| = \int_0^1 |\lambda|\,|f_A| = |\lambda| \int_0^1 |f_A| = |\lambda|\,||A||$$

Donc $||.||$ est une norme sur $\mathcal{A}$.

c) Pour $A = ((-1)^n)_{n \geqslant 0}$, on a $f_A : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $||A|| = \int_0^1 \left|\frac{1}{1+x}\right| dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$.

Pour $A = ((-1)^n(n+1))$, on a $f_A : x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2}$ et

$||A|| = \int_0^1 \left|\frac{1}{(1+x)^2}\right| dx = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x)^2} = \left[\frac{-1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

Pour $A = \left(\frac{(-1)^n}{(2n)!}\right)$, on a $\forall x \in [0, 1[\ f_A(x) = \cos(\sqrt{x}) \geqslant 0$ car $0 \leqslant \sqrt{x} < 1 \leqslant \frac{\pi}{2}$.

On a alors $||A|| = \int_0^1 \cos(\sqrt{x}) dx$.

On réalise le changement de variable $x = u^2, dx = 2u\,du$:

$$||A|| = \int_0^1 \cos(\sqrt{x}) dx = \int_0^1 2u \cos(u) du$$

On fait alors une intégration par parties

$$||A|| = [2u(\sin(u))]_0^1 - \int_0^1 2\sin(u)du = [2u\sin(u) + 2\cos(u)]_0^1 = 2\sin(1) + 2\cos(1) - 2$$

d) Pour tous $A, B \in \mathscr{A}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(\lambda A + B) = \lim_{1^-} f_{\lambda A+B} = \lim_{1^-}(\lambda f_A + f_B) = \lambda \lim_{1^-} f_A + \lim_{1^-} f_B = \lambda\varphi(A) + \varphi(B)$$

Donc φ est linéaire.
Notant $A_p = (\delta_{n,p})_{n\geqslant 0}$, on a $f_{A_p} : x \mapsto x^p$ donc $\varphi(A_p) = 1$. On a alors

$$\frac{|\varphi(A_p)|}{||A_p||} = \frac{1}{\left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1} = p+1 \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Donc φ n'est pas lipschitzienne.

e) On suppose que $(a_n) \in \mathscr{A}$ et que pour tout entier naturel n, $a_n \geqslant 0$. Cela implique en particulier que pour $x \in [0, 1[$, $f_A(x) \geqslant 0$ et donc

$$||A|| = \int_0^1 f_A(x)dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n dx$$

Intervertissons la somme et l'intégrale dans le terme de droite.

- Pour tout entier naturel n, l'application $u_n : x \mapsto a_n x^n$ est continue sur $[0, 1]$
- Pour tout entier naturel n, $||u_n||_{\infty,[0,1]} = |a_n| = a_n$. En utilisant la question 4.c) on sait que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge ce qui montre la convergence normale donc uniforme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ sur le segment $[0, 1]$.

On peut donc intégrer terme à terme, d'où

$$||A|| = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}$$

En particulier, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1}$ converge.

6) a) Le résultat a été démontré à la question 2).

b) Si $R > 1$, on sait que la fonction somme est continue sur $]-R, R[$ donc en 1, ainsi

$$\lim_{x\to 1} f_A(x) = f_A(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\ 1^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S(A)$$

Ainsi la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge au sens d'Abel et $S_{Abel}(A) = S(A)$.

c) i) Comme ρ_n est le reste d'indice n d'une série convergente, il tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, et donc le résultat est acquis par définition de la convergence vers 0.

ii) Pour tout entier $k \geqslant 1$, on a : $a_k = \rho_{k-1} - \rho_k$, d'où : (on effectue ce qu'on appelle une transformation d'Abel)

$$S_p(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{p} a_k\ x^k = \sum_{k=n+1}^{p} (\rho_{k-1} - \rho_k)\ x^k = \sum_{k=n+1}^{p} \rho_{k-1}\ x^k - \sum_{k=n+1}^{p} \rho_k\ x^k =$$

$$= \sum_{k=n}^{p-1} \rho_k\ x^{k+1} - \sum_{k=n+1}^{p} \rho_k\ x^k = x^{n+1}\ \rho_n + \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^{k+1} - x^k)\ \rho_k - x^p\ \rho_p.$$

iii) On en déduit par i) que, pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $p > n+1$:

$$\forall x \in [0,1] \quad , \quad |S_p(x) - S_n(x)| \leqslant |x^{n+1}|\ |\rho_n| + \sum_{k=n+1}^{p-1} |x^{k+1} - x^k|\ |\rho_k| + |x^p|\ |\rho_p|$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left(|x^{n+1}| + \sum_{k=n+1}^{p-1} |x^{k+1} - x^k|\ + |x^p|\right)$$
$$= \frac{\varepsilon}{2}\left(x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^k - x^{k+1})\ + x^p\right)$$

car $x^{k+1} - x^k \leqslant 0$ si $x \in [0,1]$.

iv) Or par télescopage, $x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^k - x^{k+1}) + x^p = 2\ x^{n+1} - x^p + x^p = 2\ x^{n+1} \leqslant 2\ .\ 1^{n+1} = 2$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1] \quad , \quad |R_n(x)| \leqslant 2\ \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

v) Par définition, on a montré que (R_n) converge uniformément vers l'application nulle sur $[0,1]$, et donc la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0}(a_n x^n)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

vi) Pour tout entier naturel n, la fonction $u_n : x \mapsto a_n x^n$ est continue sur $[0,1]$. Comme de plus la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$, la limite $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $[0,1]$. On en déduit que

$$\lim_{x\to 1^-} f_A(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Cela montre que $A \in \mathscr{A}$ et que $S_{Abel}(A) = S(A)$.

7) On remarque que la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ relève du théorème des séries alternées car

- Pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2n+1} \geqslant 0$.
- La suite $(\frac{1}{2n+1})_{n\geqslant 0}$ décroit.
- La suite $(\frac{1}{2n+1})_{n\geqslant 0}$ tend vers 0.

Cela montre que la série converge.

Par la question 6) on peut conclure que la série converge au sens d'Abel et que :

$$S_{Abel}(A) = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = S(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Or $\forall x \in]-1,1[$, $\text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$.

Ainsi, comme $\lim_{x\to 1^-} \text{Arctan}(x) = \frac{\pi}{4}$, on obtient par ci-dessus : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}$.

Partie II - Un théorème de Littlewood

8) On reconnaît le théorème de Césaro. On peut le déduire du théorème de sommation des relations de comparaison: comme $u_n = o(1)$ et que la série $\sum_{n\geqslant 0} 1$ est à termes positifs et divergente, on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_n = o\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) = o(n+1) = o(n)$$

donc $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

9) a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in]0,1[$. On applique l'inégalité des accroissements finis entre $1-x$ et 1 à la fonction $\varphi : t \mapsto t^k$, qui est bien continue sur $[1-x,1]$, dérivable sur $]1-x,1[$ avec

$$\forall t \in]1-x,1[\quad |\varphi'(t)| = k\,t^{k-1} \leqslant k$$

Il vient

$$|(1-x)^k - 1| = |\varphi(1) - \varphi(1-x)| \leqslant |1-(1-x)| \sup_{t\in]1-x,1[} |\varphi'(t)| \leqslant kx$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et k compris entre 0 et n, la question ci-dessus donne

$$\left|\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^k - 1\right) a_k\right| = \left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^k - 1\right| |a_k| \leqslant \frac{k}{n}|a_k|$$

En sommant et en utilisant l'inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^k - 1\right) a_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^k - 1\right) a_k\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k|a_k|$$

c) Soit $n \geqslant N$.

$$\forall k \geqslant n+1, \qquad \left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^k a_k\right| \leqslant \varepsilon \frac{(1-\frac{1}{n})^k}{k} \leqslant \frac{\varepsilon}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$$

La série géométrique de raison $1-\frac{1}{n}$ étant convergente à termes positifs, la série $\sum\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^k a_k\right)_{k\geqslant n+1}$ est absolument convergente et

$$|B_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^k a_k\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k = \frac{\varepsilon}{n}\frac{(1-\frac{1}{n})^{n+1}}{1-(1-\frac{1}{n})} \leqslant \varepsilon$$

Par définition de la limite, puisque $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \geqslant N \quad |B_n| \leqslant \varepsilon$, on a $\boxed{B_n \underset{n\to\infty}{\to} 0}$

d)

$$b_n = f_A\left(1-\frac{1}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^k - 1\right) + \sum_{k=n+1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k$$

Par l'inégalité triangulaire

$$|b_n| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^k - 1\right)\right| + |B_n|$$

puis par la question b):

$$|b_n| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + |B_n|$$

Quand n tend vers l'infini, le premier terme de cette somme tend vers 0 par la question 8), et le second terme par la question c).
Donc, par le théorème des gendarmes, $b_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

On a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = f_A\left(1-\frac{1}{n}\right) - b_n \underset{n\to\infty}{\to} S_{Abel}(A) - 0$ donc la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge, ce qu'il fallait démontrer.

Problème II

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
P(S+T=n) &= P\Big(\bigsqcup_{(i,j)\in\mathbb{N}^2, i+j=n} (S=i)\cap(T=j)\Big) = \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2, i+j=n} P((S=i)\cap(T=j)) \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2, i+j=n} P(S=i)P(T=j) \quad \text{par indépendance de } S \text{ et } T \\
&= \sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2, i+j=n} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\mu}\frac{\mu^j}{j!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\lambda^i\mu^{n-j} \quad \text{par changement d'indice } i \mapsto (i, n-i) \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{S+T \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } \lambda+\mu}$.

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{Z_n \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } n}$.
La propriété est vraie au rang 1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la propriété soit vraie au rang n.
Par le lemme des coalitions, $Z_n = X_1 + \ldots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes. On en déduit par la question précédente que $Z_{n+1} = Z_n + X_{n+1}$ suit la loi de Poisson de paramètre $n+1$.

c) Comme $(Z_n \geqslant 2n) \supset (Z_n = 2n)$, $P(Z_n \geqslant 2n) \geqslant P(Z_n = 2n) = n^{2n}e^{-n}(2n)!$.

d)

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_n = k)2^k = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!}2^k = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-n}\frac{(2n)^k}{k!} = e^{-n}e^{2n} = \boxed{e^n}$$

e) Première méthode :

$$e^n = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Z_n = k)2^k = \sum_{k=2n}^{+\infty} P(Z_n = k)2^k = \sum_{k=2n}^{+\infty} P(Z_n = k)2^{2n} = P(Z_n \geqslant 2n)4^n$$

donc $\boxed{P(Z_n \geqslant 2n) \leqslant \left(\frac{e}{4}\right)^n}$.
Seconde méthode :
Par transfert et par la question précédente, $E(2^{Z_n}) = e^n$.

$$\begin{aligned}
P(Z_n \geqslant 2n) &= P(2^{Z_n} \geqslant 2^{2n}) \quad \text{par stricte croissance de l'exponentielle} \\
&\leqslant \frac{E(2^{Z_n}}{2^{2n}} \quad \text{par la propriété de Markov et car } 2^{Z_n} \text{ est positive} \\
&= \left(\frac{e}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

f) Par les questions précédentes et par croissance de $t \mapsto t^{1/n}$ sur $\mathbb{R}^+$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n^2e^{-1}}{((2n)!)^{1/n}} \leqslant (P(Y_n \geqslant 2))^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{e}{4}$$

Or par la formule de Stirling,

$$(2n)! = \sqrt{2\pi 2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}(1+o(1))$$

donc

$$\Big((2n)!\Big)^{1/n} = (4\pi n)^{1/2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^2(1+o(1))^{1/n} = e^{\frac{1}{2n}(\ln n+\ln(4\pi))}\frac{4n^2}{e^2}(1+o(1))^{\frac{1}{n}} \sim \frac{4n^2}{e^2}$$

car quand $n\to+\infty$, $e^{\frac{1}{2n}(\ln n+\ln(4\pi))}\to e^0=1$ et $(1+o(1))^{1/n}=e^{\frac{\ln(1+o(1))}{n}}\to e^0=1$.
Donc quand $n\to+\infty$,

$$\frac{n^2e^{-1}}{((2n)!)^{1/n}} \sim \frac{n^2}{e\frac{4n^2}{e^2}} \to \frac{e}{4}$$

Par le théorème de limite par encadrement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(P(Y_n\geqslant 2))^{\frac{1}{n}} = \frac{e}{4}}$$

2) L'ensemble $E=\left\{\frac{u_n}{n}\ ,\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par zéro, donc il $\boxed{\text{admet une borne inférieure réelle}}$.

3) a) Comme $\alpha+\varepsilon>\alpha$ et α est le plus grand minorant de l'ensemble précédent, $\alpha+\varepsilon$ n'est pas un minorant de cet ensemble, donc il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $\boxed{\frac{u_{n_0}}{n_0}<\alpha+\varepsilon}$.

De plus α est un minorant de E donc $\boxed{\alpha\leqslant\frac{u_{n_0}}{n_0}}$.

b) Comme $u_n=u_{qn_0+r}\leqslant u_{qn_0}+u_r$ et $u_{qn_0}=un_0+\ldots+n_0\leqslant u_{n_0}+\ldots u_{n_0}=qu_{n_0}$, on obtient

$$\boxed{\frac{u_n}{n}\leqslant\frac{q}{qn_0+r}u_{n_0}+\frac{u_r}{n}}$$

c) Dans les notations de la question précédente, si $q\geqslant 1$, $\frac{q}{qn_0+r}\leqslant\frac{q}{qn_0}=\frac{1}{n_0}$, et si $q=0$, $\frac{q}{qn_0+r}=0\leqslant\frac{1}{n_0}$
Donc pour tout $n\geqslant 1$, comme $u_{n_0}\geqslant 0$,

$$\frac{u_n}{n}\leqslant\frac{u_{n_0}}{n_0}+\frac{u_r}{n}\leqslant\alpha+\varepsilon+\frac{K}{n}$$

où $K=\max(u_0,u_1,\ldots,u_{n_0-1})$ est indépendant de n.
Or $\frac{K}{n}\to 0$ quand $n\to+\infty$ donc il existe $M\in\mathbb{N}^*$ tel que $\forall n\geqslant M,\ \frac{K}{n}\leqslant\varepsilon$.
Comme de plus α minore E, on a

$$\boxed{\forall n\geqslant M,\ \alpha\leqslant\frac{u_n}{n}\leqslant\alpha+2\varepsilon}$$

d) Ainsi pour tout $\varepsilon'>0$, posant $\varepsilon=\frac{\varepsilon'}{2}$, il existe $M\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n\geqslant M,\ \left|\frac{u_n}{n}-\alpha\right|\leqslant\varepsilon'$$

Donc par définition de la limite, $\boxed{(\frac{u_n}{n})\text{ converge vers }\alpha}$.

4) Si $P(X_1<x)=1$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\boxed{P(Y_n<x)=1}$ car $(X_1<x)\cap(X_2<x)\cap\ldots(X_n<x)\subset(Y_n<x)$ donc

$$\begin{aligned} P(Y_n<x) &\geqslant P\Big((X_1<x)\cap(X_2<x)\cap\ldots(X_n<x)\Big) \\ &= P(X_1<x)P(X_2<x)\ldots P(X_n<x) \\ &= (P(X_1<x)^n=1 \end{aligned}$$

et car $P(Y_n<x)\leqslant 1$.
Si $P(X_1\geqslant x)>0$, alors comme $(X_1\geqslant x)\cap(X_2\geqslant x)\cap\ldots(X_n\geqslant x)\subset(Y_n\geqslant x)$,

$$P(Y_n\geqslant x)\geqslant P(X_1\geqslant x)^n\boxed{>0}$$

5) Soit $\omega \in \left((Y_m \geqslant x) \cap \left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right)\right)$.

Alors

$$\begin{aligned} Y_{m+n}(\omega) &= \frac{Z_m(\omega) + X_{m+1}(\omega) + \ldots + X_{m+n}(\omega)}{m+n} = \frac{Z_m(\omega)}{m+n} + \frac{1}{m+n}(X_{m+1}(\omega) + \ldots + X_{m+n}(\omega)) \\ &\geqslant \frac{mx}{m+n} + \frac{1}{m+n} nx = x \end{aligned}$$

donc $\boxed{\omega \in (Y_{m+n} \geqslant x)}$ d'où l'inclusion demandée.

Ainsi

$$P(Y_{n+m} \geqslant x) \geqslant P\left((Y_m \geqslant x) \cap \left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right)\right)$$

Or par le lemme des coalitions, Y_m et $\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ sont indépendantes donc

$$P\left((Y_m \geqslant x) \cap \left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right)\right) = P(Y_m \geqslant x) P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right)$$

De plus $(X_{m+1}, \ldots, X_{m+n})$ suit la même loi que $(X_1, \ldots, X_n)$ donc $\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k$ suit la même loi que Y_n et ainsi

$$P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right) = P(Y_n \geqslant x)$$

Dans le détail, notant E l'ensemble des valeurs prises par X_1, E est au plus dénombrable donc E^n également et

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right) &= \sum_{x_1,\ldots,x_n \in E, \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n) \geqslant x} P((X_{m+1}, \ldots, X_{m+n}) = (x_1, \ldots, x_n)) \\ &= \sum_{x_1,\ldots,x_n \in E, \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n \geqslant x} P(X_{m+1} = x_1) \ldots P(X_{m+n}) = x_n)) \\ &= \sum_{x_1,\ldots,x_n \in E, \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n \geqslant x} P(X_1 = x_1) \ldots P(X_n) = x_n)) \\ &= \sum_{x_1,\ldots,x_n \in E, \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n \geqslant x} P((X_1, \ldots, X_n) = (x_1, \ldots, x_n)) \\ &= P(Y_n \geqslant x) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{P(Y_{n+m} \geqslant x) \geqslant P(Y_m \geqslant x) P(Y_n \geqslant x)}$$

6) Dans le cas où $P(X_1 < x) = 1$, alors d'après la question 4), la suite $(P(Y_n \geqslant x)^{1/n}$ est la suite nulle donc $\boxed{\text{converge vers } 0}$.

Dans le cas contraire, cette suite est à valeurs strictement positives d'après la même queston 4), donc on peut poser pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -\ln P(Y_n \geqslant x)$.

D'après la question précédent et la croissance de ln, on a pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{m+n} \leqslant u_m + u_n$$

De plus cette suite est à valeurs positives car P est à valeurs dans $[0, 1]$.

D'après la question 3), la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ converge vers un réel α, donc par continuité de l'exponentielle, $\boxed{P(Y_n \geqslant x)^{1/n} = e^{\frac{-u_n}{n}} \to e^{-\alpha} \text{ quand } n \to +\infty}$.