*Les deux problèmes sont indépendants.*
*La calculatrice est interdite.*

# Problème I

— On note $\mathscr{C}$ l'espace vectoriel des suites $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ soit convergente. On note alors $S(A) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ la somme de la série.

— On note $\mathscr{D}$ l'espace vectoriel des suites $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telle que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}(a_n x^n)$ ait un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 (éventuellement infini).

— Pour $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{D}$, on considère l'application :

$$f_A : \begin{array}{ccc} [0,1[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f_A(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$$

## Partie I - Convergence au sens d'Abel

1) Dans chacun des cas suivants, déterminer le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0}(a_n x^n)$, et calculer sa somme $f_A$ sur $]-R,R[$.

   a) $a_n = (-1)^n$.

   b) $a_n = (-1)^n(n+1)$.

   c) $a_n = \dfrac{(-1)^n}{(2n)!}$ (pour la fonction somme, discuter selon le signe de $x$).

On dit qu'une série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge au sens d'Abel si :

(i) $(a_n) \in \mathscr{D}$

(ii) la fonction $f_A$ admet une limite **finie** à gauche en 1. Cette limite s'appelle la somme d'Abel de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$, on la note $S_{Abel}(A) = \lim\limits_{x\to 1^-} f_A(x)$.

On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des suites $(a_n)$ de $\mathscr{D}$ tels que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge au sens d'Abel.

2) Montrer que $\mathscr{D}$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, et que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}$.
   *On admet que $\mathscr{A}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{D}$.*

3) Étudier, dans tous les cas a), b), c) de la question 1), la convergence au sens usuel, puis la convergence au sens d'Abel, en précisant, quand elles existent, la valeur de la somme usuelle $S(A)$ et celle de $S_{Abel}(A)$.
   Les deux types de convergence coïncident-ils ?

4) Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$. On suppose **dans cette question seulement** que pour tout $n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant 0$.

   a) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$ et tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k x^k \leqslant f_A(x)$.

   b) En déduire que si $N \in \mathbb{N}$ : $\sum\limits_{k=0}^{N} a_k \leqslant S_{Abel}(A)$.
   puis que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge et que $S(A) \leqslant S_{Abel}(A)$.

   c) Montrer que $S(A) = S_{Abel}(A)$.

5) Si $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$, on pose $||A|| = \displaystyle\int_0^1 |f_A(t)|\, dt$.

a) Justifier l'existence de $||A||$.

b) Montrer que $A \mapsto ||A||$ est une norme sur $\mathscr{A}$.

c) Calculer $||A||$ pour les exemples a), b) et c) de la question 1.

d) On définit l'application $\left|\begin{array}{llll} \varphi : & \mathscr{A} & \to & \mathbb{R} \\ & A & \mapsto & \varphi(A) = S_{Abel}(A). \end{array}\right.$

Montrer que $\varphi$ est linéaire mais n'est pas lipschitzienne de $(\mathscr{A}, ||.||)$ vers $(\mathbb{R}, |.|)$.

*On pourra utiliser les suites $(A_p)$ telles que $A_p = (a_n(p))_{n\in\mathbb{N}}$ où $a_n(p) = 1$ si $n = p$ et $0$ sinon.*

e) Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{A}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n \geqslant 0$.

Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n+1}$ converge et exprimer sa somme en fonction de $||A||$.

*On pourra utiliser la question 4.*

6) Dans cette question, on veut montrer que $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$.

Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathscr{C}$.

On se propose de démontrer que $A \in \mathscr{A}$ et que $S_{Abel}(A) = S(A)$.

Soit $R$ le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} (a_n x^n)$.

a) Montrer que $R \geqslant 1$.

b) Montrer que si $R > 1$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ converge au sens d'Abel et $S_{Abel}(A) = S(A)$.

c) On suppose que $R = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on pose :

$$\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \quad ; \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{et} \quad R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k$$

Soit $\varepsilon > 0$ :

i) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $|\rho_n| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$.

ii) Justifier, pour tout entier $n$ et pour tout entier $p > n+1$, l'égalité :

$$\forall x \in [0,1], \quad S_p(x) - S_n(x) = x^{n+1}\ \rho_n + \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^{k+1} - x^k)\ \rho_k - x^p\ \rho_p$$

iii) En déduire que, pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $p > n+1$ :

$$\forall x \in [0,1] \quad , \quad |S_p(x) - S_n(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \left( x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{p-1} (x^k - x^{k+1}) + x^p \right)$$

iv) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad |R_n(x)| \leqslant \varepsilon$

v) Conclure que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} (a_n x^n)$ converge uniformément sur $[0,1]$.

vi) Conclure soigneusement le raisonnement.

7) Application : justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et calculer sa somme.

## Partie II - Un théorème de Littlewood

On reprend les notations définies après la question 1 de la partie I.

8) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers 0. Pour $n \geqslant 1$, on pose $v_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

   Montrer que la suite $(v_n)$ converge vers 0.

   *On pourra utiliser un principe de sommation des relations de comparaison.*

9) Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de $\mathscr{A}$ tel que $na_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$. On veut montrer que $A \in \mathscr{C}$.

   On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = f_A\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$.

   a) Montrer que pour $x \in ]0,1[$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\left|(1-x)^k - 1\right| \leqslant k\,x$.

   b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ :

   $$\left|\sum_{k=0}^{n}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^k - 1\right) a_k\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k|a_k|$$

   c) Soit $\varepsilon > 0$ ; soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \geqslant N \Longrightarrow |ka_k| \leqslant \varepsilon$.

   On pose $B_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^k a_k$.

   Pour $n \geqslant N$, majorer $|B_n|$ en fonction de $\varepsilon$ (et indépendamment de $n$).

   En déduire que $(B_n)$ converge vers 0.

   d) Déduire de la question 8 et de ce qui précède que $(b_n)$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini, puis conclure.

# Problème II

Soit $x$ un nombre réel et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoire réelles mutuellement indépendantes et de même loi. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Y_n$ et $Z_n$ les variables aléatoires réelles définie par

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad Y_n = \frac{Z_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

Le but de l'exercice est d'étudier la suite $\left((P(Y_n \geqslant x))^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

1) Dans cette question **seulement** on suppose que $X_1$ (et donc toutes les autres $X_i$) suivent la loi de Poisson de paramètre 1 et on prend $x = 2$.

   a) Soit $S$ et $T$ deux variables aléatoires suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda$ et $\mu$ strictement positifs. Quelle est la loi de $S + T$ ?

   b) En déduire la loi de $Z_n$ pour $n \geqslant 1$.

   c) Montrer que $P(Z_n \geqslant 2n) \geqslant \dfrac{n^{2n}e^{-n}}{(2n)!}$.

   d) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P(Z_n = k)2^k$.

   e) En déduire que $P(Z_n \geqslant 2n) \leqslant \left(\frac{e}{4}\right)^n$.

   *On pourra minorer $2^k$ par $2^{2n}$ quand $k \geqslant 2n$ ou utiliser l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire discrète bien choisie.*

   f) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (P(Y_n \geqslant 2))^{\frac{1}{n}}$.

   *On pourra utiliser la formule de Stirling.*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs vérifiant

$$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, u_{i+j} \leqslant u_i + u_j$$

On pose

$$\alpha = \inf \left\{ \frac{u_n}{n} \ , \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

2) Justifier que $\alpha$ est bien défini.

3) Soit $\varepsilon$ un réel strictement positif.

   a) Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\alpha \leqslant \frac{u_{n_0}}{n_0} \leqslant \alpha + \varepsilon$$

   b) Soit $n \geqslant 1$. On note $q \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0, n_0 - 1]\!]$ le quotient et le reste de la division euclidienne de $n$ par $n_0$. Montrer que

$$\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{q}{qn_0 + r} u_{n_0} + \frac{u_r}{n}$$

   c) En déduire qu'il existe $M \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant M$,

$$\alpha \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \alpha + 2\varepsilon$$

   d) Montrer que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

4) Montrer que si $P(X_1 < x) = 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n < x) = 1$ et que si $P(X_1 \geqslant x) > 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y_n \geqslant x) > 0$.

5) Soient $m$ et $n$ deux entiers naturels non nuls. Montrer l'inclusion d'événements suivante :

$$\left( (Y_m \geqslant x) \cap \left( \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x \right) \right) \subset (Y_{m+n} \geqslant x)$$

   et en déduire l'inégalité

$$P(Y_{n+m} \geqslant x) \geqslant P(Y_m \geqslant x) P(Y_n \geqslant x)$$

6) Démontrer la convergence de la suite

$$\left( (P(Y_n \geqslant x))^{\frac{1}{n}} \right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$