Partie I

1) Pour tout entier i, $X_i(\Omega) = [\![0, N]\!]$.

$\boxed{P(X_0 = N) = 1}$ et $P(X_0 = k) = 0$ pour $k \neq 0$.

$\boxed{P(X_1 = N-1) = 1}$ et $P(X_1 = k)$ est nul pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{N-1\}$ car la première particule choisie passe toujours de l'état $\mathscr{A}$ à l'état $\mathscr{B}$.

$\boxed{P(X_2 = N-2) = \frac{N-1}{N},\ P(X_2 = N) = \frac{1}{N}}$ et $P(X_2 = k)$ est nul pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{N-2, N\}$, car la particule seconde particule choisie est soit une des $N-1$ particules dans l'état $\mathscr{A}$ avec la probabilité $\frac{N-1}{N}$, soit la particule dans l'état $\mathscr{B}$ avec la probabilité $\frac{1}{N}$.

2) a) $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \frac{P(\emptyset)}{P(X_n=i)}$ est nulle si $j \neq i \pm 1$.

Dans les cas restants, nous procédons à un raisonnement peu rigoureux en accord avec la rigueur relative de l'énoncé ("de manière indépendante des choix précédents") mais qui suffira sans doute aux concours [1]

$\boxed{\frac{N-i}{N} \text{ si } j = i+1}$, car c'est la probabilité conditionnelle sachant que $X_n = i$ de choisir la $n+1-$ème particule parmi les $N-i$ particules dans l'état $\mathscr{A}$,

$\boxed{\frac{i}{N} \text{ si } j = i-1}$, car c'est la probabilité conditionnelle sachant que $X_n = i$ de choisir la $n+1-$ème particule parmi les i particules dans l'état $\mathscr{B}$.

Ainsi la suite est bien une chaîne de Markov homogène de matrice de transition A.

3) a) $\boxed{U_n \text{ appartient à } H_N}$ car ses coefficients sont des probabilités, donc sont positifs, et leur somme est $P(\Omega) = 1$ car X_n est à valeurs dans E_N.

b) Pour tout $j \in E_N$, par la formule des probabilités totales,

$$q_j = P(X_{n+1} = j) = \sum_{i=0}^{N} P((X_{n+1} = j) \cap (X_n = i)) = \sum_{i=0}^{N} p_i m_{i,j}$$

en notant $U_{n+1} = (q_0\ q_1\ \dots\ q_N)$, $U_n = (p_0\ p_1\ \dots\ p_N)$ et $M = (m_{i,j})$ Ainsi on a bien $\boxed{U_{n+1} = U_n M}$.

c) On calcule $U_8 = U_0 A^8$ où $U_0 = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 1)$. On trouve $\boxed{U_8 = (0\ \ 0.7499\ \ 0\ \ 0.2501)}$.

4) a)

```
def transition (etat):
    N=len(etat)
    k=randint(0,N-1)
    if etat[k] == 1:
        etat[k] = 2
    else:
        etat[k] = 1
```

[1] Rigoureusement, il faudrait numéroter les particules de 1 à N et introduire une suite de variables aléatoires $(P_n)_{n \geqslant 1}$ mutuellement indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$, la valeur de P_n donnant le numéro de la particule choisie avant l'instant n

b)

```
def tempsRetour(N):
    etatzero=[1 for k in range(N)]
    temps=0
    etat=list(etatzero)
    while temps == 0 or etat != etatzero:
        transition(etat)
        temps += 1
    return temps
```

c)

```
def esperanceRetour(N,S):
    somme = 0
    for i in range(S):
        somme += tempsRetour(N)
    return somme/S
```

Partie II

5) Pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$ les coordonnées de $\varphi(X^k)$ dans la base canonique de $R_N[X]$ sont les coefficients de la $k^{\text{ème}}$ colonne de ${}^tA$ c'est-à-dire de la $k^{\text{ème}}$ ligne de A.

Ainsi $\boxed{\varphi(X^k) = \frac{k}{N}X^{k-1} + \frac{N-k}{N}X^{k+1}}$.

6) a) Pour tout $k \in [![1, N-1]\!]$,

$$\varphi(X^k) = X^{k+1} + \frac{1-X^2}{N}kX^{k-1} = XX^k + \frac{1-X^2}{N}(X^k)'$$

La propriété vaut également pour $k = 0$ et N car

$$\varphi(X^0) = X^1 = XX^0 + \frac{1-X^2}{N}(X^0)'$$

et

$$\varphi(X^N) = X^N - 1 = XX^N + \frac{1-X^2}{N}(X^N)'$$

Puisque les applications linéaires φ et $P \mapsto XP + \frac{1-X^2}{N}P'$ coïncident sur une base (la base canonique) de F, elles sont $\boxed{\text{égales}}$.

b)

$$F = \frac{N(X-\lambda)}{(X-1)(X+1)} = 0 + \boxed{\frac{a}{X-1} + \frac{b}{X+1}}$$

car la fraction F est de degré strictement négatif, avec

$$\boxed{a = \frac{N(1-\lambda)}{2} \text{ et } b = \frac{N(1+\lambda)}{2}}$$

c) La décomposition en éléments simples de $\frac{Q'}{Q}$ (dérivée logarithmique formelle de Q) est :

$$\boxed{\frac{Q'}{Q} = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{X-a_i} = \sum_{j=1}^{s} \frac{m_j}{X-b_j}}$$

d) Soit $k \in [\![0, N]\!]$. Posons $\lambda_k = 1 - \frac{2k}{N}$. Alors $a = \frac{N(1-\lambda_k)}{2} = k$ et $b = \frac{N(1+\lambda_k)}{2} = N - k$ sont entiers naturels.
Posant $\boxed{P_k = (X-1)^k (X+1)^{N-k}}$, P_k appartient à $\mathbb{R}_N[X]$ (son degré est $k + N - k = N \leqslant N$) et par les deux questions b) et c),

$$\frac{P_k'}{P_k} = F$$

(avec $\lambda = \lambda_k$),
donc par la question a),

$$\varphi(P_k) = \lambda_k P_k$$

Comme P_k n'est pas le polynôme nul, $\boxed{\lambda_k \text{ est valeur propre de } \varphi.}$

e) L'endomorphisme φ est diagonalisable car il a $N+1$ valeurs propres distinctes et $\dim(F) = N + 1$.

7) a)

$$\boxed{U = UA \Leftrightarrow {}^tU = {}^tA{}^tU \Leftrightarrow P = \varphi(P)}$$

b) $\lambda = 1$ correspond à $k = 0$ dans les notations précédentes. De plus les sous-espaces propres de φ sont de dimension 1 car φ a $N + 1 = \dim \mathbb{R}_N[X]$ valeurs propres distinctes donc $E_1(\varphi) = Vect(P_0)$.
On a donc $UM = U$ si et seulement si $P = \mu(1+X)^N$ avec $\mu(1+X)$ à coefficients positifs de somme $\mu(1+X)^N(1)$ égale à 1
Cela équivaut à $\boxed{P = \frac{(1+X)^N}{2^N} = \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{2^N}\binom{n}{i}}$.

Partie III

8) Notant $W = VM$ on a pour tout j: $w_j = \sum_{i=0}^{N} v_i m_{ij} \geqslant 0$ et $\sum_{j=0}^{N} w_j = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant N} (v_i m_{ij}) = \sum_i (v_i \sum_j m_{ij}) = \sum_i (v_i.1) = 1$
Donc $\boxed{W \in H_N}$.
Remarquons qu'une matrice carrée est stochastique si et seulement si chacune de ses lignes appartient à H_N.
Soit N une matrice stochastique. Ses lignes appartiennent à H_N et les lignes de NM sont les produits des lignes de N par M, donc les lignes de NM appartiennent à H_N par le raisonnement précédent, donc $\boxed{NM \text{ est stochastique}}$.

9) a)

$$V_n M - V_n = \frac{1}{n+1}\Big(\sum_{k=0}^{n} VM^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} VM^k\Big) = \boxed{\frac{1}{n+1}(VM^{n+1} - V)}$$

b) D'après la question 9)a), les puissances de M sont stochastiques et les VM^k appartiennnent à H_N. Les coefficients de V_n sont donc positifs et leur somme est $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 1 = 1$, donc $\boxed{V_n \in H_N}$.

c) H_N est borné car la norme "infini" de tout élément de H_N est inférieure à 1 (des réels positifs de somme 1 sont tous inférieurs ou égaux à 1).
De plus chacune des fonctions qui à $(p_0\ p_1\ \ldots p_N) \in \mathcal{M}_{1,N+1}(\mathbb{R})$ associent p_0, p_1, ..., p_N, $p_0 + p_1 + \ldots + p_N$ est linéaire donc continue puisque $\mathcal{M}_{1,N+1}(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

Les images réciproques des fermés $[0,+\infty[$, $[0,+\infty[$, ..., $[0,+\infty[$, $\{1\}$ par ces applications sont donc fermés, donc leur intersection, qui est H_N, l'est également.
Donc $\boxed{H_N \text{ est compact}}$ comme fermé borné d'un espace de dimension finie.

d) Il existe donc une extractrice φ et un élément U de H_N tels que $V_{\varphi(n)} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} U$.
La suite $(VM^{\varphi(n)+1})$ est à valeurs dans H_N donc est bornée (car H_N est borné).
Ainsi $\frac{VM^{\varphi(n)+1}}{\varphi(n)+1} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$ (car $\varphi(n) \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \infty$).
Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V_{\varphi(n)}M = V_{\varphi(n)} + \frac{1}{\varphi(n)+1}(VM^{\varphi(n)+1} - V)$$

on a par continuité du produit matriciel,

$$\boxed{UM = U + 0 = U}$$

Partie IV

10) Pour $k \neq i$, notons I l'ensemble des $(x_2, \ldots, x_n) \in E_N^{n-1}$ tels que $x_2, \ldots, x_{n-1}$ soient tous différents de i et $x_n = i$.

$$P(T_i = n \mid (X_1 = k)\cap(X_0 = j)) = \sum_{(x_2,\ldots,x_n)\in I} \frac{P((X_n = x_n)\cap \ldots \cap (X_2 = x_2)\cap (X_1 = k)\cap (X_0 = j))}{P((X_1 = k)\cap (X_0 = j))}$$

Or

$$\begin{aligned} & P((X_n = x_n)\cap \ldots \cap (X_2 = x_2)\cap (\ X_1 = k)\cap (X_0 = j)) \\ = \ & m_{x_{n-1},x_n} P((X_{n-1} = x_{n-1})\cap \ldots \cap (X_0 = j)) \\ = \ & \ldots \\ = \ & m_{x_{n-1},x_n} m_{x_{n-2},x_{n-1}} \ldots m_{k,x_2} P((X_1 = k)\cap (X_0 = j)) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{P(T_i = n \mid X_1 = k \text{ et } X_0 = j) = \sum_{(x_2,\ldots,x_n)\in I} m_{x_{n-1},x_n} m_{x_{n-2},x_{n-1}} \ldots m_{k,x_2}}$$

Le calcul de $P(T_i = n-1 \mid X_0 = k)$ donne le $\boxed{\text{même résultat}}$.

11)

$$\begin{aligned} P_j(T_i = n) &= \frac{P(T_i = n \ et \ X_0 = j)}{P(X_0 = j)} \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{P(T_i = n \ et \ X_0 = j \ et \ X_1 = k)}{P(X_0 = j)} \\ &= \sum_{k\in K} \frac{P(T_i = n \mid X_0 = j \ et \ X_1 = k)P(X_0 = j \ et \ X_1 = k)}{P(X_0 = j)} \\ &= \sum_{k\in K} P(T_i = n \mid X_0 = j \ et \ X_1 = k)P(X_1 = k \mid X_0 = j) \\ &= \sum_{k\in K} P(T_i = n \mid X_0 = j \ et \ X_1 = k)m_{jk} \end{aligned}$$

où K est l'ensemble des $k \in E_N$ tels que $P(X_0 = j \text{ } et \text{ } X_1 = k) \neq 0$.

Pour $k = i$, on a $P(T_i = n \mid X_0 = j \text{ } et \text{ } X_1 = k) = 0$ car $n \geqslant 2$ et si $X_1 = i$, $T_1 = 1 \neq n$.

Pour $k \in E_N \setminus K$, on a $m_{jk} = 0$ car $0 = P(X_0 = j \text{ } et \text{ } X_1 = k) = m_{jk}P(X_0 = j)$ et car $P(X_0 = j) \neq 0$.

D'après la question précédente, on a donc bien $\boxed{\text{l'égalité demandée}}$.

12)

$$\begin{aligned}
E_j(T_i) &= P_j(T_i = 1) + \sum_{n=2}^{\infty} n \sum_{k=0,\ k\neq i}^{N} m_{jk}P_k(T_i = n-1) \\
&= P_j(X_1 = i) + \sum_{k=0,\ k\neq i}^{N} m_{jk} \sum_{n=2}^{\infty} nP_k(T_i = n-1) \\
&= m_{j,i} + \sum_{k=0,\ k\neq i}^{N} m_{jk} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1+1)P_k(T_i = n-1) \\
&= m_{ji} + \sum_{k=0,\ k\neq i}^{N} m_{jk}(E_k(T_i) + P_k(\Omega)) \\
&= \boxed{1 + \sum_{k=0,\ k\neq i}^{N} m_{jk}E_k(T_i)}
\end{aligned}$$

NB : Comme la famille $(m_{jk}nP_k(T_i = n-1))_{j,k,n}$ est à termes positifs donc on peut la sommer par paquets lorsqu'on cacule dans $[0, +\infty]$.

13) Notons S la somme de l'énoncé.

Remarquons que pour k, on a $\sum_j p_j m_{jk} = p_k$ car $UM = U$.

D'une part,

$$S = \sum_k (p_k - p_k)E_k(T_i) = 0$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
S &= \sum_k p_k E_k(T_i) - \sum_j p_j \sum_k m_{jk}E_k(T_i) \\
&= \sum_k p_k E_k(T_i) - \sum_j p_j \Big(E_j(T_i) - 1 + m_{ji}E_i(T_i) \Big) \\
&= \sum_j p_j - (\sum_j p_j m_{ji})E_i(T_i) \\
&= 1 - p_i E_i(T_i)
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{p_i E_i(T_i) = 1}$.

14) On a donc $\boxed{E_N(T_N) = \frac{1}{p_N} = 2^N}$ (par 7)b), et en admettant que les $E_j(T_i)$ sont finies).