Définitions et notations

Soit N un entier non nul. On note $E_N = [\![0, N]\!]$.

- Toutes les variables aléatoires seront définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
- On considèrera des matrices carrées de $\mathscr{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ et des matrices lignes de $\mathscr{M}_{1,N+1}(\mathbb{R})$.
  Les indices iront de 0 à N.
- Une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ sera dite stochastique si
  - Pour tout $(i, j) \in [\![0, N]\!]^2, m_{ij} \geqslant 0$
  - Pour tout $i \in [\![0, N]\!]$, $\sum_{j=0}^{N} m_{ij} = 1$. C'est-à-dire que la somme des coefficients de chaque ligne de la matrice est égale à 1.

  On note $S_N \subset \mathscr{M}_{N+1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices stochastiques.
- On notera H_N l'ensemble des matrices lignes $V = (p_0 \cdots p_N) \in \mathscr{M}_{1,N+1}(\mathbb{R})$ telles que :
  - Pour tout $i \in [\![0, N]\!],\ p_i \geqslant 0$
  - On a $\sum_{i=0}^{N} p_i = 1$. C'est-à-dire que la somme des termes est égale à 1.
- On considère la norme infinie sur $\mathscr{M}_{1,N+1}(\mathbb{R})$ notée $||.||_\infty$.
- On appelle **chaîne de Markov homogène** sur E_N une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E_N telle qu'il existe une matrice stochastique $M = (m_{ij}) \in S_N$ appelée **matrice de transition** vérifiant que pour tout entier n et tout $(x_0, \ldots, x_n) \in E_N^{n+1}$ on ait

  $$P\Big((X_0 = x_0)\cap\cdots\cap(X_{n-1} = x_{n-1})\cap(X_n = x_n)\Big) = P\Big((X_0 = x_0)\cap\cdots\cap(X_{n-1} = x_{n-1})\Big)m_{x_{n-1},x_n}$$

  Il en résulte [1] que

  $$\boxed{P\Big((X_{n-1} = x_{n-1}) \cap (X_n = x_n)\Big) = P(X_{n-1} = x_{n-1})m_{x_{n-1},x_n}}.$$

  Les relations précédentes peuvent s'écrire à l'aide de probabilités conditionnelles sous réserve de ne pas conditionner par un événement négligeable :
  Lorsque $P\Big((X_0 = x_0) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = x_{n-1})\Big) \neq 0$,

  $$P\Big(X_n = x_n \;\Big|\; (X_0 = x_0) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = x_{n-1})\Big) = m_{x_{n-1},x_n}$$

  Lorsque $P(X_{n-1} = x_{n-1}) \neq 0$,

  $$P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}) = m_{x_{n-1},x_n}.$$

[1] En effet

$$\begin{aligned} P((X_{n-1} = x_{n-1}) \cap (X_n = x_n)) &= \sum_{x_0,\ldots,x_{n-2}\in E_N} P((X_0 = x_0) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = x_{n-1}) \cap (X_n = x_n)) \\ &= m_{x_{n-1},x_n} \sum_{x_0,\ldots,x_{n-2}\in E_N} P((X_0 = x_0) \cap \cdots \cap (X_{n-1} = x_{n-1})) \\ &= m_{x_{n-1},x_n} P(X_{n-1} = x_{n-1}). \end{aligned}$$

Partie I - Un exemple : Le modèle d'Ehrenfest

On considère N particules qui peuvent se trouver chacune dans deux états notés $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$. À l'instant 0, toutes les particules sont dans l'état $\mathscr{E}$. Avant chaque instant n, on choisit (de manière équiprobable sur l'ensemble de toutes les particules et indépendamment des choix précédents) une particule qui change d'état.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de particules dans l'état $\mathscr{E}'$ à l'instant n.

1) Donner les lois de X_0, X_1 et X_2. On justifiera les résultats.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(i,j) \in E_N^2$, tel que $P(X_n = i) \neq 0$.

   Calculer la probabilité conditionnelle $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ et en déduire que la suite (X_n) est une chaine de Markov homogène de matrice de transition

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{N}{N} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{N} & 0 & \frac{N-1}{N} & \ddots & & \vdots \\ 0 & \frac{2}{N} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \frac{1}{N} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{N}{N} & 0 \end{pmatrix}$$

3) On note $U_n = (P(X_n = 0) \quad P(X_n = 1) \quad \cdots \quad P(X_n = N)) \in \mathscr{M}_{1,N+1}(\mathbb{R})$.

   a) Justifier que pour tout entier n, $U_n \in H_N$.
   b) Montrer que pour tout entier n, $U_{n+1} = U_n A$.
   c) À l'aide de la calculatrice, donner U_8 dans le cas $N = 3$.

4) Tous les programmes de cette question sont à écrire en Python.

   Un état de la simulation est donné par une liste `etat` de N entiers. Pour tout i compris entre 0 et $N-1$, `etat[i]` vaut 1 si la particule i est dans l'état $\mathscr{E}$ et 2 si elle est dans l'autre état.

   a) Écrire une fonction `transition(etat)` qui renvoie la liste obtenue en faisant changer d'état exactement une particule choisie aléatoirement. On pourra utiliser la fonction `randint` telle que `randint(a,b)` renvoie au hasard un nombre entier compris entre a et b inclus.
   b) Écrire une fonction `tempsRetour(N)` qui simule l'expérience ci-dessus en partant d'un état avec N particules toutes dans l'état $\mathscr{E}$ et qui renvoie le premier temps nécessaire (strictement positif) pour que toutes les particules soient de nouveau dans l'état $\mathscr{E}$. On ne s'occupera pas du fait que la boucle puisse ne pas terminer.
   c) Écrire une fonction `esperanceRetour(N,S)` qui simule S expériences comme à la question précédente et renvoie la moyenne constatée des temps de retour.

Partie II - Étude d'un endomorphisme

Soit $F = \mathbb{R}_N[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus N. On considère l'endomorphisme φ de F dont la matrice dans la base canonique est la transposée de A. La matrice A est la matrice définie dans la partie I.

5) Justifier que pour $k \in [\![1, N-1]\!]$, $\varphi(X^k) = \dfrac{k}{N}X^{k-1} + \dfrac{N-k}{N}X^{k+1}$

6) a) Montrer que

$$\forall P \in F,\ \varphi(P) = XP + \frac{1 - X^2}{N}P'$$

   b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{N(X-\lambda)}{X^2-1}$.

c) Soit $Q = (X - a_1)\cdots(X - a_r) = (X - b_1)^{m_1}\cdots(X - b_s)^{m_s} \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé ($a_1, \dots, a_r$ des réels, $b_1, \dots, b_s$ des réels deux à deux distincts et $m_1, \dots, m_s$ des entiers naturels). Rappeler sans démonstration la décomposition en éléments simples de $\frac{Q'}{Q}$ en fonction de $a_1, \dots, a_r$ puis en fonction de $b_1, \dots, b_s$ et de $m_1, \dots, m_s$.

d) En déduire que les réels $\lambda = 1 - \frac{2k}{N}$ où $k \in [\![0, N]\!]$ sont des valeurs propres de φ.

e) En déduire que φ est diagonalisable.

7) a) Soit $U = (p_0 \cdots p_N) \in \mathscr{M}_{1,N+1}(\mathbb{R})$. Montrer que $U = UA$ si et seulement si le polynôme

$$P = \sum_{k=0}^{N} p_k X^k$$

est un vecteur propre de φ associé à la valeur propre 1.

b) Montrer que pour toute matrice ligne $U \in H_N$,

$$UA = U \iff \forall i \in E_N,\ p_i = \binom{N}{i}\frac{1}{2^N}.$$

Partie III - Etude des matrices stochastiques

Soit $M \in S_N$ une matrice stochastique.

8) Montrer que si $V \in H_N$ et $M \in S_N$ alors $VM \in H_N$. En déduire que le produit de deux matrices stochastiques est encore stochastique.

9) On veut montrer qu'il existe une matrice ligne $U \in H_N$ tel que $UM = U$. On considère une matrice ligne quelconque $V \in H_N$ et on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} VM^k$$

a) Montrer que pour tout entier n, $V_n M = V_n + \dfrac{1}{n+1}(VM^{n+1} - V)$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \in H_N$.

c) Justifier que H_N est un compact de $\mathscr{M}_{1,N+1}(\mathbb{R})$.

d) En déduire l'existence de $U \in H_N$ tel que $UM = U$.

Partie IV - Temps de retour à l'origine

On considère une chaine de Markov homogène $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E_N de matrice de transition M.
On note pour tout $i \in E_N$, T_i la variable aléatoire définie par

$$T_i = \begin{cases} +\infty & \text{si } \forall n \geqslant 1, X_n \neq i \\ \inf\{n \geqslant 1\ ,\ X_n = i\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

(c'est-à-dire que $\forall \omega \in \Omega, T_i(\omega) = \inf\{n \geqslant 1\ ,\ X_n(\omega) = i\}$ dans $[0, +\infty]$).

On suppose que les variables T_i sont finies presque sûrement.
On suppose également que $\forall j \in E_N,\ P(X_0 = j) \neq 0$.
Pour tout $j \in E_N$, on note P_j la probabilité conditionnelle $P_{(X_0=j)}$. On note alors $E_j(T_i)$ dans $[0, +\infty]$ l'espérance de la variable T_i **pour la probabilité** P_j. On a donc

$$E_j(T_i) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP_j(T_i = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(T_i = n \mid X_0 = j).$$

10) Soit i, j et k dans E_N avec $k \neq i$ et $P(X_1 = k \mid X_0 = j) \neq 0$. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$,

$$P(T_i = n \mid X_1 = k \text{ et } X_0 = j) = P(T_i = n - 1 \mid X_0 = k).$$

11) En utilisant le système complet d'événement donné par la variable aléatoire X_1, justifier que pour $n \geqslant 2$,

$$P_j(T_i = n) = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{N} m_{jk} P_k(T_i = n-1).$$

12) En déduire que dans $[0, +\infty]$,

$$E_j(T_i) = 1 + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{N} m_{jk} E_k(T_i).$$

13) Soit $U = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_N \end{pmatrix}$ un élément de H_N vérifiant $UM = U$ dont l'existence a été prouvée dans la partie III. On suppose que pour tout $(i, j) \in E_N^2$, $E_i(T_j) < +\infty$.

En calculant de deux manières $\sum\limits_{k=0}^{N} \left(p_k - \sum\limits_{j=0}^{N} p_j m_{jk} \right) E_k(T_i)$, montrer que $p_i E_i(T_i) = 1$.

14) Application au modèle d'Erhenfest : On considère la chaine de Markov de la partie I et on suppose que les hypothèses faites dans la partie IV sont vérifiées.

En utilisant la question 7.b) donner le temps moyen qu'il faudra attendre pour que toutes les particules soient de nouveau dans l'état $\mathscr{E}$ sachant qu'à $n = 0$ toutes les particules étaient dans l'état $\mathscr{E}$.