Semaine 16 - du 24 au 28 janvier

Topologie des espaces vectoriels normés (suite)

Limites

Limite d'une fonction f définie sur A en un point a adhérent à A. Extension à $a = \infty$.
Une fonction admettant une limite en a est bornée au voisinage de a.
Caractérisation séquentielle de la limite
Cas des applications à valeurs dans un produit d'espace vectoriel normés. Le produit étant normé par la norme produit.
Limite d'une composée, d'une combinaison linéaire, d'un produit

Continuité

Fonctions continues en $a \in A$. Fonctions continues sur A
Caractérisation séquentielle de la continuité.
Invariance de la continuité en remplaçant les normes par des normes équivalentes
Continuité d'une composée, d'une combinaison linéaire, d'un produit.
Unicité du prolongement continue d'une fonction définie sur une partie dense
Image réciproque d'un ouvert / d'un fermé par une application continue
Applications uniformément continues ; uniformément continue implique continue
Applications lipschitziennes ; lipschitzienne implique uniformément continue.
Les applications **linéaires** sont continues si et seulement si elles sont lipschitziennes

Compacité

Définition d'une partie compacte A d'un espace vectoriel normé par la propriété de Bolzano-Weierstrass : toute suite d'élément de A admet une valeur d'adhérence.
La notion de compacte ne change pas si on remplace la norme par une norme équivalente
Une partie compacte est fermée et bornée : réciproque fausse en général
Soit X une partie d'un compact A. Elle est compacte si et seulement si elle est fermée (dans A)
Une suite (u_n) d'un compact converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.
Un produit fini de compacts est compact.
Une l'image d'un compact par une application continue est un compact
Théorème des bornes atteintes pour les applications à valeurs dans $\mathbf{R}$
Théorème de Heine : Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue

Espaces vectoriels de dimension finie

Toutes les normes sont équivalentes
Une partie A d'un espace vectoriel de dimension finie est compacte si et seulement elle est fermée bornée.
Une suite bornée converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence
Les sous-espaces vectoriels sont fermés
Les applications linéaires sont continues
Les applications multilinéaires sont continues.
Les applications polynomiales sont continues