

1. Soit $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. D'après, la formule du binôme de Newton.

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1$$

2. Soit $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la formule du binôme donne

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = (x+y)^n$$

En dérivant (par rapport à x) on a

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k x^{k-1} y^{n-k} = n(x+y)^{n-1}$$

En multipliant par x et en prenant $y = 1-x$ on obtient bien

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$$

De plus la formule est aussi vraie pour $n = 0$.

3. La encore la formule est clairement vraie pour $n = 0$ et $n = 1$. Pour le cas général, on repart de la formule obtenue au début de la question précédente. En dérivant deux fois on a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-1) x^{k-2} y^{n-k} = n(n-1)(x+y)^{n-2}$$

et donc, en multipliant par x^2 et en posant $y = 1-x$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k(k-1) x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} k(k-1) x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$$

En écrivant $k^2 = k(k-1) + k$ et en utilisant la question précédente, on obtient

$$\sum_{k=2}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2$$

4. Soit $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - 2nx \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + n^2 x^2 \\ &= nx + n(n-1)x^2 - 2(nx)^2 + n^2 x^2 \\ &= nx(x-1) \end{aligned}$$

On sait que la fonction $x \mapsto x(1-x)$ atteint son maximum en $x = \frac{1}{2}$. On peut donc poser $C = \frac{1}{4}$ et on a

$$\sum_{k=0}^n (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{n}{4}$$

Remarque : On peut traiter ces questions différemment. On introduit une variable aléatoire X sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) qui suit la loi $\mathcal{B}(n, x)$. On obtient alors le résultat de la question 1) en disant

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$$

On obtient le résultat de la question 2) en disant que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k x^k (1-x)^{n-k} = E(X) = nx$$

Pour finir la question 4) s'obtient en voyant que

$$\sum_{k=0}^n (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = E((X - E(X))^2) = V(X) = nx(1-x)$$

5. La fonction f est continue sur le segment $[0, 1]$ (qui est donc compact). D'après le théorème de Heine, elle est uniformément continue donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

6. Soit $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |B_n(x) - f(x)| &= \left| \left(\sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \right) - f(x) \right| \\ &= \left| \sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \right| \text{ d'après 1)} \\ &\leq \sum_{k \in X} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| + \sum_{k \in Y} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \\ &\leq \varepsilon \sum_{k \in X} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k \in Y} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \left(\left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| + |f(x)| \right) \\ &\leq \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k \in Y} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

La dernière ligne vient du fait que

$$\sum_{k \in X} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} = 1$$

7. On remarque alors que

$$\sum_{k \in Y} (k - nx)^2 \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket} (k - nx)^2 \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{n}{4}$$

Donc, par définition de Y , si $k \in Y$, $\frac{(k - nx)^2}{n^2 \alpha^2} \geq 1$ d'où

$$\sum_{k \in Y} \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{n^2 \alpha^2} \sum_{k \in Y} (k - nx)^2 \binom{k}{n} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4\alpha n}$$

Il existe donc un entier N tel que, pour $n \geq N$, $\frac{1}{4\alpha n} \leq \varepsilon$ et donc $|B_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\|B_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

On vient donc de montrer que $(B_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$.

8. Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$. Soit $u : t \mapsto a + t(b-a)$ qui est une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[a, b]$. La fonction $g = f \circ u$ est continue sur $[0, 1]$. Il existe donc (P_n) qui converge uniformément vers g sur $[0, 1]$. Soit $v = u^{-1} : x \mapsto \frac{1}{b-a}(x-a)$ qui est un polynôme. On pose $Q_n : x \mapsto P_n(v(x))$ qui est donc une suite de fonctions polynômiales. Pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - Q_n(x)| = |f(u(v(x))) - P_n(v(x))| = |g(v(x)) - P_n(v(x))| \leq \|g - P_n\|_{\infty, [0,1]}$$

On en déduit que

$$\|f - Q_n\|_{\infty, [a,b]} \leq \|g - P_n\|_{\infty, [0,1]} \rightarrow 0$$

Finalement la suite (Q_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.