Théorème (Théorème d'approximation de Weierstrass)

Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbf{R}$ et f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$. Il existe une suite (P_n) de fonctions polynomiales sur $[a,b]$ telle que (P_n) converge uniformément vers f, c'est-à- dire : $||f-P_n||_{\infty,[a,b]} \to 0$.

On propose une démonstration probabiliste du théorème d'approximation de Weierstrass basé sur une partie de l'épreuve de Mines PSI 2019.

On trouve aussi ce résultat (avec quasiment les mêmes questions dans une épreuve CCP MP 2015).

Partie I : Fonctions sur $[0,1]$.

1. Justifier que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbf{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$.
2. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbf{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx$.
3. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbf{N}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2$.
4. En déduire que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbf{N}$:
$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant Cn,$$
pour une constante $C > 0$ à préciser.

On se donne maintenant $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ continue et $\varepsilon > 0$.

Pour $n \in \mathbf{N}$, on définit la fonction polynomiale :
$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

5. Justifier l'existence de $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$,
$$|x-y| < \alpha \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

Pour $x \in [0,1]$ on partitionne les entiers k naturels entre 0 et n en :
$$X = \left\{k \in \{0,1,\ldots,n\} : \left|x - \frac{k}{n}\right| < \alpha\right\} \text{ et } Y = \left\{k \in \{0,1,\ldots,n\} : \left|x - \frac{k}{n}\right| \geqslant \alpha\right\}.$$

6. Montrer que, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbf{N}$,
$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \sum_{k\in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$
où on rappelle que $\|f\|_\infty = \sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1} |f(x)|$.
7. En utilisant la définition de l'ensemble Y et les questions précédentes, conclure qu'il existe n suffisamment grand tel que :
$$\|B_n - f\|_\infty \leqslant 2\varepsilon.$$

Partie II : Cas général

8. Démontrer le cas général.