On note X le nombre de clients qui rentrent dans un magasin en un jour. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On suppose que chaque client du magasin a un probabilité $p \in]0,1[$ de se faire voler son portefeuille dans le magasin indépendamment des autres clients. On note alors Y le nombre de personnes qui se font voler leur portefeuille. On note aussi $Z = X - Y$.

a) Soit $m \in \mathbf{N}$, rappeler $P(X = m)$ et donner $E(X)$. (on ne demande pas les calculs)

Corrigé

D'après le cours, comme $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$,

$$\forall m \in \mathbf{N}, P(X = m) = \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} \quad ; \quad E(X) = \lambda$$

b) Déterminer pour tout n dans $\mathbf{N}$ la loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$

Corrigé

On suppose que $(X = n)$. Il y a donc n clients dans le magasin. Chacun se fait voler son portefeuille **indépendamment** des autres avec la probabilité p donc la loi conditionnelle de Y sachant $(X = n)$ est la loi binomiale de paramètres n et p. On a

$$\forall k \in \mathbf{N}, P(Y = k|X = n) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

en posant $q = 1 - p$.

c) Déterminer la loi de Y

Corrigé

Soit $k \in \mathbf{N}$, on calcule la probabilité $P(Y = k)$ en utilisant le système complet d'événements $\{(X = n)\}_{n \in \mathbf{N}}$.

$$\begin{aligned}
P(Y = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) P(Y = k|X = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\
&= \frac{1}{k!} p^k e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \lambda^n \frac{1}{(n-k)!} q^{n-k} \\
&= \frac{1}{k!} p^k e^{-\lambda} \lambda^k \sum_{n=k}^{+\infty} \lambda^{n-k} \frac{1}{(n-k)!} q^{n-k} \\
&= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}
\end{aligned}$$

On en déduit que $Y \sim \mathscr{P}(\lambda p)$.

d) Montrer que Y et Z sont indépendantes. On pourra commencer par déterminer la loi de Z.

Corrigé

La variable aléatoire Z représente le nombre de personnes qui ne se font pas voler leur portefeuille. Le même calcul affirme que $Z \sim \mathscr{P}(\lambda q)$ car la probabilité qu'une personne ne se fasse pas voler son portefeuille est $q = 1 - p$. Maintenant, on calcule pour k_1 et k_2 dans $\mathbf{N}$ la probabilité que $(Y = k_1) \cap (Z = k_2) = (Y = k_1) \cap (X = k_1 + k_2)$.
On a

$$\begin{aligned} P((Y = k_1) \cap (X = k_1 + k_2)) &= P(X = k_1 + k_2).P(Y = k_1 | X = k_1 + k_2) \\ &= \frac{\lambda^{k_1+k_2} e^{-\lambda}}{(k_1 + k_2)!} \binom{k_1 + k_2}{k_1} p^{k_1} q^{k_2} \\ &= \frac{\lambda^{k_1+k_2} e^{-\lambda(p+q)}}{k_1! k_2!} p^{k_1} q^{k_2} \\ &= \frac{(\lambda p)^{k_1} e^{-\lambda p}}{k_1!} \times \frac{(\lambda q)^{k_2} e^{-\lambda q}}{k_2!} \\ &= P(Y = k_1) P(Z = k_2) \end{aligned}$$

Les variables Y et Z sont bien indépendantes.