– Partie I –

Dans le corrigé, certaines questions sont corrigées avec des tables de vérité, d'autres avec du calcul algébrique. Le choix est complètement arbitraire, toutes les questions pouvant être traitées avec les deux méthodes.

1. On suppose que $A \equiv B$ donc pour toute valuation λ, $I_\lambda(A) = I_\lambda(B)$. De ce fait,

$$I_\lambda(F \Rightarrow A) = \overline{I_\lambda(F)} + I_\lambda(A) = \overline{I_\lambda(F)} + I_\lambda(B) = I_\lambda(F \Rightarrow A)$$

Donc $(F \Rightarrow A) \equiv (F \Rightarrow B)$.

2. (a) Considérons une implication élément $F \Rightarrow G$.
   - Si $\mathbf{f}$ apparait dans F alors $F \equiv \mathbf{f}$. De ce fait, pour toute valuation λ,

$$I_\lambda(F \Rightarrow G) = \overline{I_\lambda(\mathbf{f})} + I_\lambda(G) = 1 + I_\lambda(G) = 1$$

   On en déduit que $F \Rightarrow G$ est une tautologie.
   - Si $\mathbf{v}$ apparait dans G alors $G \equiv \mathbf{v}$. De ce fait, pour toute valuation λ,

$$I_\lambda(F \Rightarrow G) = \overline{I_\lambda(F)} + I_\lambda(\mathbf{v}) = \overline{I_\lambda(F)} + 1 = 1$$

   On en déduit que $F \Rightarrow G$ est une tautologie.
   - Si $\mathbf{v}$ apparait dans F et si on note F' tel que $F = F' \wedge \mathbf{v}$ alors $F \equiv F'$. De ce fait, $F \Rightarrow G$ est une tautologie si et seulement si $F' \Rightarrow G$ en est une. De même, Si $\mathbf{f}$ apparait dans F et si on note G' tel que $G = G' \vee \mathbf{f}$ alors $G \equiv G'$. De ce fait, $F \Rightarrow G$ est une tautologie si et seulement si $F \Rightarrow G'$ en est une.
   - Si on suppose que ni $\mathbf{v}$, ni $\mathbf{f}$ n'apparait dans F ou dans G. On pose $F = x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$ et $G = y_1 \vee \cdots \vee y_q$. On a alors pour toute valuation λ,

$$\begin{array}{rcl} I_\lambda(F \Rightarrow G) & = & \overline{I_\lambda(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p)} + I_\lambda(y_1 \vee \cdots \vee y_q) \\ & = & \overline{I_\lambda(x_1) \bullet \cdots \bullet I_\lambda(x_p)} + I_\lambda(y_1) + \cdots + I_\lambda(y_q) \\ & = & \overline{I_\lambda(x_1)} + \cdots + \overline{I_\lambda(x_p)} + I_\lambda(y_1) + \cdots + I_\lambda(y_q) \end{array}$$

   S'il existe $i \in [\![1,p]\!]$ et $j \in [\![1,q]\!]$ tels que $x_i = y_j$, on a alors

$$I_\lambda(F \Rightarrow G) = (\overline{I_\lambda(x_i)} + I_\lambda(y_j)) + \cdots = 1 + \cdots = 1$$

   De ce fait $F \Rightarrow G$ est une tautologie.
   À l'inverse, si on suppose que pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ et pour tout $j \in [\![1,q]\!]$ on a $x_i \neq y_j$, on peut considérer λ telle que, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $\lambda(x_i) = 1$ et pour tout $j \in [\![1,q]\!]$, $\lambda(y_j) = 0$. Le calcul montre alors que $I_\lambda(F \Rightarrow G) = 0$ et donc $F \Rightarrow G$ n'est pas une tautologie.

   (b) L'implication (a) est une tautologie car x_2 est dans les deux membres, l'implication (c) est une tautologie car $\mathbf{f}$ est dans le membre de gauche et l'implication (d) est une tautologie car $\mathbf{v}$ est dans le membre de droite.

   L'implication (b) n'est pas une tautologie.

3. On veut démontrer que
$$((F \wedge \neg A) \Rightarrow G) \equiv (F \Rightarrow (G \vee A)) \tag{G$_1$}$$
Réalisons une table de vérité

A	F	G	$F \wedge \neg A$	$G \vee A$	$(F \wedge \neg A) \Rightarrow G$	$F \Rightarrow (G \vee A)$
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	1

Les deux dernières colonnes étant identiques : $((F \wedge \neg A) \Rightarrow G) \equiv (F \Rightarrow (G \vee A))$
En appliquant (G$_1$) pour $F = \mathbf{v}$,
$$((\neg A) \Rightarrow G) \equiv ((\mathbf{v} \wedge \neg A) \Rightarrow G) \equiv (\mathbf{v} \Rightarrow (G \vee A))$$

4. Soit λ une valuation,
$$\begin{array}{rcl}
I_\lambda((F \wedge (A \vee B)) \Rightarrow G) & = & \overline{I_\lambda((F \wedge (A \vee B)))} + I_\lambda(G) \\
& = & \overline{I_\lambda(F) \bullet I_\lambda(A \vee B)} + I_\lambda(G) \\
& = & \overline{I_\lambda(F)} + \overline{I_\lambda(A) + I_\lambda(B)} + I_\lambda(G) \\
& = & \left(\overline{I_\lambda(F)} + \overline{I_\lambda(A)} \bullet \overline{I_\lambda(B)}\right) + I_\lambda(G) \\
& = & \left((\overline{I_\lambda(F)} + \overline{I_\lambda(A)}) \bullet (\overline{I_\lambda(F)} + \overline{I_\lambda(B)})\right) + I_\lambda(G) \\
& = & \left((\overline{I_\lambda(F)} + \overline{I_\lambda(A)}) + I_\lambda(G)\right) \bullet \left((\overline{I_\lambda(F)} + \overline{I_\lambda(B)}) + I_\lambda(G)\right) \\
& = & \left((\overline{I_\lambda(F) \bullet I_\lambda(A)}) + I_\lambda(G)\right) \bullet \left((\overline{I_\lambda(F) \bullet I_\lambda(B)}) + I_\lambda(G)\right) \\
& = & I_\lambda((F \wedge A) \Rightarrow G) \bullet I_\lambda((F \wedge B) \Rightarrow G)
\end{array}$$
De ce fait, si $(F \wedge (A \vee B)) \Rightarrow G$ est une tautologie, alors pour toute valuation λ, $I_\lambda((F \wedge (A \vee B)) \Rightarrow G) = 1$ et donc $I_\lambda((F \wedge A) \Rightarrow G) = 1$ et $I_\lambda((F \wedge B) \Rightarrow G) = 1$. On en déduit que $(F \wedge A) \Rightarrow G$ et $(F \wedge B) \Rightarrow G$ sont des tautologies. Réciproquement, si $(F \wedge A) \Rightarrow G$ et $(F \wedge B) \Rightarrow G$ sont des tautologies, pour toute valuation λ ,$I_\lambda((F \wedge (A \vee B)) \Rightarrow G) = 1$ car $I_\lambda((F \wedge A) \Rightarrow G) = 1$ et $I_\lambda((F \wedge B) \Rightarrow G) = 1$.
On peut alors déduire (G$_4$) en appliquant (G$_3$) avec $F = \mathbf{v}$.
5. Soit λ une valuation,
$$\begin{array}{rcl}
I_\lambda(F \Rightarrow (G \vee \neg A)) & = & \overline{I_\lambda(F)} + I_\lambda(G \vee \neg A) \\
& = & \overline{I_\lambda(F)} + I_\lambda(G) + \overline{I_\lambda(A)} \\
& = & \overline{I_\lambda(F) \bullet I_\lambda(A)} + I_\lambda(G) \\
& = & \overline{I_\lambda(F \wedge A)} + I_\lambda(G) \\
& = & I_\lambda((F \wedge A) \Rightarrow G)
\end{array}$$
Ce qui montre bien que $(F \Rightarrow (G \vee \neg A)) \equiv ((F \wedge A) \Rightarrow G)$.
Maintenant, en appliquant (D$_1$) avec $G = \mathbf{f}$, on obtient (D$_2$) car $(\mathbf{f} \vee \neg A) \equiv \neg A$.

6. Écrivons la table de vérité de $F \Rightarrow (G \vee (A \wedge B))$

n	F	G	A	B	$A \wedge B$	$G \vee (A \wedge B)$	$F \Rightarrow (G \vee (A \wedge B))$	$F \Rightarrow (G \vee A)$	$F \Rightarrow (G \vee B)$
1	0	0	0	0	0	0	1	1	1
2	0	0	0	1	0	0	1	1	1
3	0	0	1	0	0	0	1	1	1
4	0	0	1	1	1	1	1	1	1
5	0	1	0	0	0	1	1	1	1
6	0	1	0	1	0	1	1	1	1
7	0	1	1	0	0	1	1	1	1
8	0	1	1	1	1	1	1	1	1
9	1	0	0	0	0	0	0	0	0
10	1	0	0	1	0	0	0	0	1
11	1	0	1	0	0	0	0	1	0
12	1	0	1	1	1	1	1	1	1
13	1	1	0	0	0	1	1	1	1
14	1	1	0	1	0	1	1	1	1
15	1	1	1	0	0	1	1	1	1
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Si on suppose que $F \Rightarrow (G \vee (A \wedge B))$ alors on ne considère pas les trois lignes 9, 10 et 11. Dans ce cas, on voit que $F \Rightarrow (G \vee A)$ et $F \Rightarrow (G \vee B)$ sont des tautologies. Réciproquement, si on suppose que $F \Rightarrow (G \vee A)$ et $F \Rightarrow (G \vee B)$ sont des tautologies, on doit là aussi exclure les lignes 9, 10 et 11. On voit alors que $F \Rightarrow (G \vee (A \wedge B))$ est une tautologie.

En appliquant (D_3) au cas où $G = \mathbf{f}$ on obtient (D_4)

7. On considère une implication $F \Rightarrow G$. On peut supposer que $F = F_1 \wedge \cdots \wedge F_p$ où $p \geq 1$ et $G = G_1 \vee \cdots \vee G_q$ où $q \geq 1$. De plus, par associativité de $\wedge$ on peut supposer que les formules F_i sont atomiques ou de la forme $\neg A$, $A \vee B$ ou $A \Rightarrow B$ (c'est-à-dire qu'elles ne sont pas de la forme $A \wedge B$). De la même manière on peut supposer que les formules G_i sont atomiques ou de la forme $\neg A$, $A \wedge B$ ou $A \Rightarrow B$ (c'est-à-dire qu'elles ne sont pas de la forme $A \vee B$).

Passons en revue les différents cas :
— Si F_p est de la forme $\neg A$, on applique (G_1) si $p \geq 2$ et (G_2) sinon. Cela fait disparaitre $\neg A$ de la formule de gauche.
— Si F_p est de la forme $A \vee B$, on applique (G_3) si $p \geq 2$ et (G_4) sinon. On se ramène a étudier deux formules où le terme $A \vee B$ a disparu à gauche.
— Si F_p est de la forme $A \Rightarrow B$, on applique (G_5) si $p \geq 2$ et (G_6) sinon. On se ramène a étudier deux formules où le terme $A \Rightarrow B$ a disparu à gauche.

On peut itérer cela tant que la formule à gauche n'est pas une formule conjonctive élémentaire.

Ensuite,
— Si G_q est de la forme $\neg A$, on applique (D_1) si $q \geq 2$ et (D_2) sinon. Cela fait disparaitre $\neg A$ de la formule de droite.
— Si F_p est de la forme $A \vee B$, on applique (D_3) si $q \geq 2$ et (D_4) sinon. On se ramène a étudier une ou deux formules où le terme $A \vee B$ a disparu à droite.
— Si F_p est de la forme $A \Rightarrow B$, on applique (D_5) si $q \geq 2$ et (D_6) sinon. On se ramène a étudier une formule où le terme $A \Rightarrow B$ a disparu à droite.

On peut itérer cela tant que la formule à droite n'est pas une formule disjonctive élémentaire.

En itérant, on se ramène (questions suivantes) à vérifier si des implications élémentaires sont des tautologies.

8. (a) Soit F une formule, $F \equiv (\mathbf{v} \Rightarrow F)$. On applique alors l'algorithme précédent qui permet de savoir si $(\mathbf{v} \Rightarrow F)$ (et donc F) est une tautologie.
   (b) En utilisant que F est une contradiction si et seulement si $\neg F$ est une tautologie, on ne ramène au cas précédent.
9. (a) Soit $F \Rightarrow G$ une implication élémentaire. Dans ce cas $F = x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$ (éventuellement en ajoutant $\mathbf{v}$ ou $\mathbf{f}$). On en déduit que

$$\mu_g(F) = \sum_{i=1}^{p} \mu_c(x_i) = 0$$

De même, en posant $G = x_1 \vee \cdots \vee x_q$ (éventuellement en ajoutant $\mathbf{v}$ ou $\mathbf{f}$). On en déduit que

$$\mu_d(F) = \sum_{i=1}^{q} \mu_c(x_i) = 0$$

Finalement, $\mu_i(F \Rightarrow G) = \mu_g(F) + \mu_d(G) = 0$.

   (b) Si $F = F_1 \wedge \ldots \wedge F_p$ et $G = G_1 \wedge \ldots \wedge G_q$ avec éventuellement $p = 1$ ou $q = 1$, alors :

$$\mu_g(F \wedge G) = \sum_{i=1}^{p} \mu_g(F_i) + \sum_{j=1}^{q} \mu_g(G_j) = \mu_g(F) + \mu_g(G)$$

De plus, en supposant que les F_i ne sont pas des conjonctions,

$$\mu_c(F) = (p-1) + \sum_{i=1}^{p} \mu_c(F_i) = p - 1 + \mu_g(F) \geq \mu_g(F)$$

   (c) Si $F = F_1 \vee \ldots \vee F_p$ et $G = G_1 \vee \ldots \vee G_q$ avec éventuellement $p = 1$ ou $q = 1$, alors :

$$\mu_d(F \vee G) = \sum_{i=1}^{p} \mu_c(F_i) + \sum_{j=1}^{q} \mu_c(G_j) = \mu_d(F) + \mu_d(G)$$

De plus en supposant que les F_i ne sont pas des disjonctions,

$$\mu_c(F) = (p-1) + \sum_{i=1}^{p} \mu_c(F_i) = p - 1 + \mu_d(F) \geq \mu_d(F)$$

   (d) Nous allons montrer que chacune de 12 règles utilisées dans l'algorithme de la question 7 ramène le fait que l'implication $F \Rightarrow G$ soit une tautologie au fait qu'une ou plusieurs implications soient des tautologies et que ces nouvelles implications ont une i-mesure strictement inférieure à $\mu_i(F \Rightarrow G)$.
   — Règle (G_1) : $\mu_i((F \wedge \neg A) \Rightarrow G) = \mu_g(F) + \mu_g(\neg A) + \mu_d(G) = 1 + \mu_g(F) + \mu_c(A) + \mu_d(G) > \mu_g(F) + \mu_c(A) + \mu_d(G) \geq \mu_g(F) + \mu_d(A) + \mu_d(G) = \mu_i(F \Rightarrow (G \vee A))$
   On a bien $\mu_i((F \wedge \neg A) \Rightarrow G) > \mu_i(F \Rightarrow (G \vee A))$.
   — Règle (G_3) : $\mu_i((F \wedge (A \vee B)) \Rightarrow G) = \mu_g(F) + \mu_g(A \vee B) + \mu_d(G) = 1 + \mu_g(F) + \mu_c(A) + \mu_c(B) + \mu_d(G)$.
   Donc

$$\mu_i((F \wedge (A \vee B)) \Rightarrow G) > \mu_g(F) + \mu_c(A) + \mu_d(G) \geq \mu_g(F) + \mu_g(A) + \mu_d(G) = \mu((F \wedge A) \Rightarrow G)$$

   De même, $\mu_i((F \wedge (A \vee B)) \Rightarrow G) > \mu((F \wedge B) \Rightarrow G)$

Les autres règles se traitent de la même manière.

L'algorithme termine donc quand on arrive à une liste d'implications de i-mesure nulle. Ce sont nécessairement des implications élémentaires car sinon, on pourrait appliquer une des 12 règles.

10. Notons $T_1 = \big(x_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow x_3)\big) \Rightarrow \big((x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow (x_1 \Rightarrow x_3)\big)$.

On applique (G_6) et on obtient que T_1 est une tautologie si et seulement si T_2 et T_3 le sont où

$T_2 = (x_2 \Rightarrow x_3) \Rightarrow \big((x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow (x_1 \Rightarrow x_3)\big)$ et $T_3 = \mathbf{v} \Rightarrow \Big(x_1 \vee \big((x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow (x_1 \Rightarrow x_3)\big)\Big)$,

À son tour T_2 se décompose par (G_6) en T_4 et T_5 avec :

$T_4 = x_3 \Rightarrow \big((x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow (x_1 \Rightarrow x_3)\big)$ et $T_5 = \mathbf{v} \Rightarrow \Big(x_2 \vee \big((x_1 \Rightarrow x_2) \Rightarrow (x_1 \Rightarrow x_3)\big)\Big)$.

En utilisant (D_5), $T_3 \equiv \big(\mathbf{v} \wedge (x_1 \Rightarrow x_2)\big) \Rightarrow \big(x_1 \vee (x_1 \Rightarrow x_3)\big)$ qui se décompose d'après (G_5) en T_6 et T_7) avec :

$T_6 = (\mathbf{v} \wedge x_2) \Rightarrow \big(x_1 \vee (x_1 \Rightarrow x_3)\big)$ et $T_7 = \mathbf{v} \Rightarrow \big(x_1 \vee (x_1 \Rightarrow x_3)\big)$.

On a immédiatement, en utilisant (D_5) : $T_6 \equiv (\mathbf{v} \wedge x_2 \wedge x_1) \Rightarrow (x_1 \vee x_3)$ qui est une implication élémentaire. C'est une tautologie car la variable x_1 figure à la fois dans les deux membres.

De même, en utilisant (D_5) : $T_7 \equiv (\mathbf{v} \wedge x_1) \Rightarrow (x_1 \vee x_3)$ qui est une tautologie.

D'après (D_6), $T_4 \equiv T_8$ où $T_8 = \big(x_3 \wedge (x_1 \Rightarrow x_2)\big) \Rightarrow (x_1 \Rightarrow x_3)$ qui se décompose d'après (G_5) en $T_8 \equiv (T_9 \wedge T_{10})$ avec :

$T_9 = (x_3 \wedge x_2) \Rightarrow (x_1 \Rightarrow x_3)$ et $T_{10} = x_3 \Rightarrow (x_1 \vee (x_1 \Rightarrow x_3))$.

D'après (D_6), $T_9 \equiv (x_3 \wedge x_2 \wedge x_1) \Rightarrow x_3$ qui est est une tautologie.

D'après (D_5), $T_{10} \equiv (x_3 \wedge x_1) \Rightarrow (x_1 \vee x_3)$ qui est est une tautologie.

D'après (D_5), $T_5 \equiv \big(\mathbf{v} \wedge (x_1 \Rightarrow x_2)\big) \Rightarrow \big(x_2 \vee (x_1 \Rightarrow x_3)\big)$ qui se décompose d'après (G_5) en $T_{11} \wedge T_{12}$ avec :

$T_{11} = (\mathbf{v} \wedge x_2) \Rightarrow \big(x_2 \vee (x_1 \Rightarrow x_3)\big) \equiv (\mathbf{v} \wedge x_2 \wedge x_1) \Rightarrow (x_2 \vee x_3)$ (d'après (D_5)) : c'est une tautologie.

$T_{12} = \mathbf{v} \Rightarrow \big(x_1 \vee x_2 \vee (x_1 \Rightarrow x_3)\big) \equiv (\mathbf{v} \wedge x_1) \Rightarrow (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ (d'après (D_5)) : c'est une tautologie.

Au total, T_1 est bien une tautologie.

– Partie II –

11. On écrit les fonctions voulues

```
let estVide l = l = [];;

let rec ajoute f lf = match lf with
   | [] -> [f]
   | tf :: q -> if tf = f then lf else tf :: (ajoute f q);;

let uneFormule lf = let t::q = lf in t;;

let reste lf = let t::q = lf in q;;
```

12.

```
let ensembleVide () = {v = false ; f = false ; tbl = Array.make vmax false ;
    lf = []};;

let queDesVariables ef =  estVide ef.lf;;
```

13. On récupère `t1` et `t2` les tableaux qui permettent de savoir si une variable atomique est dans l'un ou l'autre ensemble. On parcourt alors les deux tableaux jusqu'à ce que l'on trouve un indice `i` tel que `t1.(i)` et `t2.(i)` soient tous les deux vrais ce qui signifie que x_i appartient aux deux ensembles. On s'arrête au pire à la fin des tableaux.

```
let intersection e1 e2 =
        let t1 = e1.tbl and t2 = e2.tbl in
                let presente = ref false in
                        let i = ref 0 in
                                while not !presente && !i < vmax do
                                        presente := t1.(!i) && t2.(!i)
                                done;
                                !presente;;
```

14. On ajoute la formule dans le bon champ :

```
let ajouteEns f e = match f with
   | Vrai -> {v = true; f = e.f; tbl = e.tbl; lf = e.lf}
   | Faux -> {v = e.v; f = true; tbl = e.tbl; lf = e.lf}
   | Var (i) -> let t = e.tbl in t.(i) <- true;
                {v = e.v; f = e.f; tbl = t; lf = e.lf}
   | _ -> {v = e.v; f = e.f; tbl = e.tbl; lf = ajoute f (e.lf)};;
```

15.

```
let formuleSuivante e =
        let f = uneFormule e.lf in
                (f, {v = e.v; f = e.f; tbl = e.tbl; lf = reste (e.lf)});;
```

16. On applique l'algorithme précédent

```
let rec verifie u v =
  let qdvu = queDesVariables u and qdvv = queDesVariables v in
  if qdvu && qdvv
  then u.F || v.V || intersection u v
  else if not (qdvu)
       then let (f,ru) = formuleSuivante u in match f with
  | Et(a,b) -> verifie (ajouterEns (ajouterEns ru a) b) v
  | Non a   -> let w = if queDesVariables  ru
                       then (* G2 *) ajouterEns Vrai ru
                       else (* G1 *) ru
               in verifie w (ajouterEns v a)

  | Ou(a,b) -> (* G3 et G5 *)
                   verifie(ajouterEns ru a) v
                && verifie(ajouterEns ru b) v

  | Implique(a,b) -> let w = if queDesVariables ru
                             then (* G5 *) ajouterEns ru Vrai
                             else (* G6 *) uu
                     in    verifie(ajouterEns ru b) v
                        && verifie w (ajouterEns v a)
  |  _  -> failwith "Erreur 1"

       else if not (qdvv)
            then let (g,rv) = formuleSuivante v in match g with

  | Ou(a,b) -> verifie u (ajouterEns (ajouterEns rv a) b)

  | Non a   -> let w = if queDesVariables  rv
                       then (* D2 *) ajouter_formule rv Faux
                       else (* D1 *) rv
               in verifie(ajouterEns  u a) w

  | Et(a,b) -> (* D3 et D4 *)
                   verifie u (ajouterEns rv a)
                && verifie u (ajouterEns rv a)

  | Implique(a,b) -> (* D5 et D6 *)
                     verifie(ajouterEns u a)(ajouterEns rv b)

 |  _  -> failwith "Erreur 2"

        else failwith "Erreur 3" ;;
```

17. Pour tester si une formule F est une tautologie, on teste si $\mathbf{v} \Rightarrow F$ en est une.

```
let tautologie f =
    verifie(ajouterEns (ensembleVide()) vrai)
             (ajouterEns (ensembleVide()) f) ;;
```