Devoir libre 11 - Corrigé

I - Préliminaire

On se fixe une norme N sur l'ensemble $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes et on note $S = \{X \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R}) \mid N(X) = 1\}$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$. La fonction $X \mapsto AX$ de $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ dans lui même est linéaire donc continue et $N : \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est continue (car 1-lipschitzienne). On en déduit que $\theta : X \mapsto N(AX)$ est continue. Maintenant, comme $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie, la sphère unité S est compacte car elle est fermée et bornée.

   D'après le théorème des bornes atteintes, la restriction de la fonction θ à S est bornée et atteint ses borne.

2. Montrons que $||.||$ est une norme sur $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$.
   - Soit $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$. Pour tout $X \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$, $\theta(X) \geq 0$ donc $||A|| \geq 0$.
   - Soit $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ tel que $||A|| = 0$. On a que pour tout $X \in S$, $\theta(X) = 0$ donc $AX = 0$. On en déduit que $AX = 0$ pour tout $X \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$ en remarquant que si X n'est pas nul, $AX = N(X)A\frac{X}{N(X)}$.
     Finalement $A = 0$.
   - Soit $A \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $X \in S$, $N(\lambda AX) = |\lambda|N(AX)$. On en déduit que
   $$||\lambda A|| = \max_{X\in S} N(\lambda AX) = \max_{X\in S} |\lambda|N(AX) = |\lambda| \max_{X\in S} N(AX) = |\lambda|||A||.$$
   - Soit A et B dans $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$, pour tout $X \in S$, $N((A+B)X) = N(AX+BX) \leq N(AX) + N(BX)$ et donc
   $$||A+B|| = \max_{X\in S} N((A+B)X) \leq \max_{X\in S}(N(AX)+N(BX)) \leq ||A|| + ||B||.$$

   Finalement $\boxed{||.|| \text{ est une norme sur } \mathscr{M}_d(\mathbb{R}).}$

3. Soit $X \in \mathscr{M}_{d,1}(\mathbb{R})$.
   Si $X = 0$, on a bien $N(AX) \leq ||A||N(X)$.
   Si $X \neq 0$, on pose $Y = \frac{X}{N(X)}$ et on a $N(AY) \leq ||A||$ car $||Y|| = 1$. Par linéarité, $N(AX) = N(X)N(AY) \leq ||A||N(X)$.
   De ce fait, pour A et B dans $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ et $X \in S$,
   $$N((AB)X) = N(A(BX)) \leq ||A||N(BX) \leq ||A||.||B||.$$
   On en déduit que $\boxed{||AB|| \leq ||A||.||B||.}$

– II –

4. Soit $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ qui converge vers $D \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$. Elle est donc bornée et on note $\lambda > 0$ tel que pour tout entier n, $||D_n|| \leq \lambda$.
   (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose pour $n \geq k$ et $n \geq 1$,
   $$u_n = \frac{n!}{(n-k)!n^k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-k+i}{n}.$$
   Or pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $\frac{n-k+i}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$ donc $\boxed{(u_n)_{n\geq k} \text{ converge vers } 1}$.
   De plus, comme pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $\frac{n-k+i}{n} \in [0,1]$, $u_n \in [0,1]$ et donc $\boxed{0 \leq 1 - u_n \leq 1.}$

(b) Nous emploierons ci-dessous $u_{n,k}$ pour souligner la dépendance en k. Remarquons que parmi les résultats de la question précédente, seule la positivité des $1 - u_{n,k}$ sera utilisée. On présentera à la fin (*) une autre démonstration utilisant les limites des suites $(u_{n,k})_{n\geq k}$.

$$\begin{aligned}
\left|\left|\left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D_n^k\right|\right| &= \left|\left|\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} - \frac{1}{k!}\right) D_n^k\right|\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} |u_{n,k} - 1| \; ||D_n^k|| \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (1 - u_{n,k}) \; ||D_n^k|| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (1 - u_{n,k}) \; ||D_n||^k
\end{aligned}$$

En effet, on a $||D_n^0|| = ||I_d|| = \max_{X\in S} N(I_d X) = \max_{X\in S} 1 = 1$, et comme $||.||$ est sous-multiplicative, on en déduit par récurrence que pour tout naturel k (y compris zéro), $||D_n^k|| \leq ||D_n||^k$.
Ainsi

$$\begin{aligned}
\left|\left|\left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D_n^k\right|\right| &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (1 - u_{n,k}) \lambda^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \lambda^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} u_{n,k} \lambda^k \\
&= \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \lambda^k - \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n}
\end{aligned}$$

Or $\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 + \frac{\lambda}{n})} = e^{n(\frac{\lambda}{n} + o(1/n))} = e^{\lambda + o(1)} \underset{n\to\infty}{\to} e^{\lambda}$ par continuité de l'exponentielle (et car $\lambda + o(1) \underset{n\to\infty}{\to} \lambda + 0 = \lambda$).
De plus $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \lambda^k \underset{n\to\infty}{\to} \lambda$ (par définition de l'exponentielle).
Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \lambda^k - \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} \lambda - \lambda = 0$, et donc par encadrement,

$$\left|\left|\left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D_n^k\right|\right| \underset{n\to\infty}{\to} 0$$

et donc

$$\boxed{\left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} D_n^k \underset{n\to\infty}{\to} 0_{\mathcal{M}_d(\mathbb{K})}}$$

(*) On aurait aussi pu écrire pour $0 \leq N \leq n$:

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (1 - u_{n,k}) \lambda^k \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} (1 - u_{n,k}) \lambda^k + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k$$

Fixant $\epsilon > 0$, la seconde somme est inférieure à $\epsilon/2$ pour N suffisamment grand car la suite des restes d'une série convergente converge vers zéro. Choisissant un tel N, la première somme, dont le nombre de termes est fixé, tend vers 0 quand n tend vers l'infini comme somme d'un nombre fini de suites de limite nulle. Donc cette somme est inférieure à $\epsilon/2$ pour n suffisamment grand. Ainsi, par définition de la limite, $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(1-u_{n,k})\lambda^k \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

(c) Soit $n \geq 0$.

$$||D_n^1 - D^1|| = 1\lambda^{1-1}||D_n - D||.$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $||D_n^k - D^k|| \leq k\lambda^{k-1}||D_n^k - D^k||$.

$$\begin{aligned} ||D_n^{k+1} - D^{k+1}|| &= ||D_n^k(D_n - D) + (D_n^k - D^k)D|| \\ &\leq ||D_n^k||.||D_n - D|| + ||D_n^k - D^k||.||D|| \text{ par inégalité triangulaire} \\ &\qquad \text{et sous-multiplicativité de } ||.|| \\ &\leq ||D_n||^k.||D_n - D|| + ||D_n^k - D^k||.||D|| \text{ (voir question précédente)} \end{aligned}$$

Or par continuité de $||.||$ et par passage aux limites dans les inégalités larges, on a :

$$||D|| = ||\lim_{n\to\infty} D_n|| = \lim_{n\to n\infty} ||D_n|| \leq \lambda$$

Ainsi, en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$||D_n^{k+1} - D^{k+1}|| \leq \lambda^k||D_n - D|| + k\lambda^{k-1}||D_n - D||\lambda = (k+1)\lambda^k||D_n - D||$$

Par récurrence, $\boxed{||D_n^k - D^k|| \leq k\lambda^{k-1}||D_n^k - D^k|| \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*}$.

(d) On a donc

$$\begin{aligned} ||\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}D_n^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}D^k|| &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}||D_n^k - D^k|| \text{ car } D_n^0 - D^0 = I_d - I_d = 0 \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}k\lambda^{k-1}||D_n - D|| \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} \frac{\lambda^p}{p!}||D_n - D|| \\ &\leq e^{\lambda}||D_n - D|| \quad \text{car les sommes partielles d'une série} \\ &\qquad \text{à termes positifs sont inférieures ou égales à sa somme.} \end{aligned}$$

Or $e^{\lambda}||D_n - D|| \underset{n\to\infty}{\to} e^{\lambda}0 = 0$. Par encadrement $||\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}D_n^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}D^k|| \underset{n\to\infty}{\to} 0$, donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}D_n^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}D^k \underset{n\to\infty}{\to} 0}.$$

On en déduit grâce à la question b) que :

$$\boxed{\left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n = \left(I_d + \frac{D_n}{n}\right)^n - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}D_n^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}D_n^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}D^k + \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}D^k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + 0 + \exp(D).}$$

5. Soit $M \in \mathscr{M}_d(\mathbb{R})$ telle que $||M|| \leq 1$

$$||\exp(M) - I_d - M|| = ||\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}M^k|| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}||M||^k = \varphi(||M||)||M||^2$$

où $\varphi : t \mapsto \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} t^{k-2}$ est une fonction développable en série entière sur $\mathbb{R}$ donc est continue sur $\mathbb{R}$ et ainsi bornée sur tout segment donc $\boxed{\text{majorée sur } [0,1] \text{ par une constante } \mu}$.
On pouvait aussi appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange (dans une version sans valeurs absolues) à la fonction exponentielle réelle (en remarquant que $||M||^2\varphi(||M||) = e^{||M||} - 1 - ||M|| \leq \mu||M||^2$ avec $\boxed{\mu = \frac{1}{2!} \sup_{[0,1]} \exp'' = \frac{e}{2})}$.

6. Soit A, B deux matrices de $\mathscr{M}_d(\mathbb{R})$.
   (a) D'après la question précédente, posant $M_n = \exp(A/n) - I - \frac{A}{n}$ et $N_n = \exp(B/n) - I - \frac{B}{n}$ on a :
   $$\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right) = (I_d + \frac{A}{n} + M_n)(I_d + \frac{B}{n} + N_n)$$
   avec $||M_n|| \leq \mu\frac{||A||^2}{n^2}$ pour $n > ||A||$ et $||N_n|| \leq \mu\frac{|B|||^2}{n^2}$ pour $n > ||B||$.
   $$\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right) = I + \frac{A}{n} + \frac{B}{n} + C_n$$
   où C_n est une somme de six termes.
   Pour $n > \max(||A||, ||B||)$,
   $$||C_n|| \leq \frac{1}{n^2}(||A||.||B|| + ||A||\frac{\mu}{n} + ||B||\frac{\mu}{n} + ||I||\mu + ||I||\mu + \frac{\mu^2}{n^2}) \leq \frac{||A||.||B|| + \mu(||A|| + ||B|| + 2 + \mu)}{n^2}$$
   Ainsi $\boxed{||C_n|| = O(1/n^2)}$.
   (b)
   $$\left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n = \left(I + \frac{A + B + nC_n}{n}\right)^n$$
   Posant $D_n = A + B + nC_n$, on a $D_n \underset{n\to\infty}{\to} A + B$ car $||nC_n|| = O(1/n) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.
   Par la question 9), on a donc
   $$\boxed{\left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n \underset{n\to\infty}{\to} \exp(A + B).}$$