

Partie I - Généralités

- 1) a) Soit P et Q deux polynômes, PQ est encore un polynôme donc, par linéarité, $x \mapsto P(x)Q(x)\delta(x)$ est intégrable d'après la condition *iii*) et donc $(P|Q)$ est correctement défini. Vérifions les axiomes des produits scalaires.
- Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $(P|Q) = (Q|P)$ par commutativité du produit.
 - Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto (P|Q)$ est linéaire d'après la linéarité de l'intégrale. Par symétrie on en déduit que $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est bilinéaire.
 - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $x \in J$, $P^2(x)\delta(x)$ est positif d'après la condition *ii*). Par positivité de l'intégrale, $(P|P) \geq 0$.
 - Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que $(P|P) = 0$. Comme J n'est pas réduit à un point que $x \mapsto P^2(x)\delta(x)$ est positive et **continue** (condition *i*) on en déduit que pour tout x dans J , $P^2(x)\delta(x) = 0$ et donc $P(x) = 0$ (condition *ii*). De ce fait la fonction polynomiale associée à P a une infinité de racines donc P est le polynôme nul.

Enfinement $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

- b) Soit P, Q et R sont trois polynômes,

$$(RP|Q) = \int_J (RP)(x)Q(x)\delta(x)dx = \int_J P(x)(R(x)Q(x))\delta(x)dx = (P|RQ).$$

- 2) Montrer l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que

(A1) Pour tout $i \in \mathbb{N}$ le terme de plus haut degré de P_i est X^i .

(A2) pour tout (i, j) dans \mathbb{N}^2 , $i \neq j \Rightarrow (P_i|P_j) = 0$

On pourra montrer par récurrence que pour tout entier n , la suite finie (P_0, P_1, \dots, P_n) existe et est unique.

Montrons par récurrence que pour tout entier n il existe une unique suite de polynômes (P_0, P_1, \dots, P_n) vérifiant les conditions

(A1_n) Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ le terme de plus haut degré de P_i est X^i .

(A2_n) Pour tout (i, j) dans $\llbracket 0, n \rrbracket^2$, $i \neq j \Rightarrow (P_i|P_j) = 0$.

(A3_n) La suite (P_0, \dots, P_n) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

— Initialisation : Pour $n = 0$, on pose $P_0 = 1$. Il vérifie bien les conditions (A1₀), (A2₀) et (A3₀). De par (A1₀), c'est le seul.

— Hérité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang n et on veut la démontrer au rang $n + 1$. On sait qu'il existe une unique suite (P_0, \dots, P_n) vérifiant les conditions (A1_n), (A2_n) et (A3_n).

Si $(Q_0, \dots, Q_n, Q_{n+1})$ est une suite finie vérifiant les conditions (A1_{n+1}), (A2_{n+1}) et (A3_{n+1}), par restriction des quantificateurs, la suite (Q_0, \dots, Q_n) vérifie (A1_n) et (A2_n) c'est donc une famille libre (comme sous-famille d'une famille libre) de $n + 1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ donc elle vérifie aussi (A3_n). Par unicité, on en déduit que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P_i = Q_i$. De plus, $Q_{n+1} = X^{n+1} + R_{n+1}$ où $R_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]$. D'après (A3_n) il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ tels que

$$Q_{n+1} = X^{n+1} + \sum_{i=0}^n \lambda_i P_i.$$

Maintenant, la condition (A2_{n+1}) implique que pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $0 = (Q_{n+1}|Q_i) = (X^{n+1}|Q_i) + \lambda_i(Q_i|Q_i)$. C'est-à-dire $\lambda_i = -\frac{(X^{n+1}|Q_i)}{(Q_i|Q_i)}$ où le dénominateur n'est pas nul car $(Q_i|Q_i) > 0$.

Enfinement la seule suite finie $(Q_0, \dots, Q_n, Q_{n+1})$ vérifiant les conditions (A1_{n+1}), (A2_{n+1}) et (A3_{n+1}) est définie par

$$\begin{cases} Q_i = P_i & \text{si } i \leq n \\ Q_{n+1} = X^{n+1} - \sum_{i=0}^n \frac{(X^{n+1}|P_i)}{(P_i|P_i)} P_i \end{cases}$$

Réciproquement, cette suite vérifie les conditions (A1_{n+1}) et (A2_{n+1}) par construction. De plus, c'est une famille orthogonale de polynômes non nuls. Elle est donc libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ en tant que famille libre de $n + 2$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension $n + 2$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

On construit donc ainsi une suite infinie $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ qui vérifie les conditions (A1), (A2) et (A3).

- 3) Soit n un entier et Q un polynôme de degré d strictement inférieur à n . D'après la propriété (A3), on peut décomposer Q dans la base (P_0, \dots, P_d) : $Q = \lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_d P_d$. On a alors

$$(Q|P_n) = \sum_{i=0}^d \lambda_i (P_i|P_n) = 0$$

car la famille (P_i) est orthogonale.

- 4) On fixe $n \geq 2$.

- a) D'après la propriété (A1) le polynôme $P_n - X P_{n-1}$ est de degré au plus $n - 1$ (car les coefficients dominants s'annulent). Ils se décompose donc dans la base (P_0, \dots, P_{n-1}) . On en déduit qu'il existe des réels $C_{n,0}; C_{n,1}; \dots; C_{n,n-1}$ tels que

$$P_n - X P_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n,k} P_k$$

c'est-à-dire

$$P_n = (X + C_{n,n-1})P_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} C_{n,k} P_k.$$

- b) Soit $k \in \llbracket 0, n - 3 \rrbracket$.

$$0 = (P_n|P_k) = (X P_{n-1}|P_k) + \sum_{i=0}^{n-1} C_{n,i} (P_i|P_k) = (X P_{n-1}|P_k) + C_{n,k} (P_k|P_k).$$

Maintenant, $(X P_{n-1}|P_k) \underset{\text{question 1.b}}{=} (P_{n-1}|X P_k) \underset{\text{question 3}}{=} 0$. Donc $\boxed{C_{n,k} = 0}$.

- c) Le calcul précédent affirme que $C_{n,n-2} (P_{n-2}|P_{n-2}) = -(X P_{n-1}|P_{n-2}) = -(P_{n-1}|X P_{n-2})$.

Maintenant, $P_{n-1} - X P_{n-2}$ est de degré inférieur ou égal à $n - 2$ car le coefficient dominant s'annule, on peut donc écrire, $X P_{n-2} = P_{n-1} + Q$ où $\deg(Q) \leq n - 1$. On en déduit alors, que

$$(P_{n-1}|X P_{n-2}) = (P_{n-1}|P_{n-1} + Q) = (P_{n-1}|P_{n-1}) + (P_{n-1}|Q) \underset{\text{question 3}}{=} (P_{n-1}|P_{n-1}).$$

Finalement $\boxed{C_{n,n-2} = -\frac{(P_{n-1}|P_{n-1})}{(P_{n-2}|P_{n-2})}}$. Comme le produit scalaire est défini et positif et que

$P_{n-1} \neq 0$ on a bien que $\boxed{C_{n,n-2} < 0}$.

On pose dans ce qui suit $\boxed{\alpha_n = C_{n,n-1}}$ et $\boxed{\beta_n = -C_{n,n-2}}$ et on a donc

$$P_n = (X + \alpha_n)P_{n-1} - \beta_n P_{n-2}$$

où $\beta_n > 0$.

- 5) L'objet de cette question est l'étude de la réalité des zéros de P_n lorsque $n \geq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par E_n l'ensemble des zéros de P_n réels appartenant à \mathring{J} et d'ordre de multiplicité impair.

- a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Si E_n était vide, P_n n'aurait que des zéros complexes ou de multiplicité paire. On pourrait de factoriser en

$$P_n = \delta \prod_{i=1}^s (X - \alpha_i)^{2p_i} \times \prod_{j=1}^r (X^2 - \beta_j X + \gamma_j)$$

où le premier produit provient des (éventuelles) racines réelles de multiplicité paire et le deuxième des (éventuelles) racines complexes. En particulier, P_n serait de signe constant. Or on a $(P_0|P_n) = \int_J P_n(x)\delta(x) = 0$. Comme $P_n\delta$ est de signe constant et continue, pour tout x dans J , $P_n(x)\delta(x) = 0$ et donc $P_n = 0$. C'est absurde. On en déduit que E_n n'est pas vide.

- b) Soit donc $E_n = \{u_1, \dots, u_m\}$ où $1 \leq m \leq n$ avec $u_1 < u_2 < \dots < u_m$. On pose $S = \prod_{k=1}^m (X - u_k)$. On peut donc écrire

$$P_n = \delta \prod_{i=1}^s (X - \alpha_i)^{2p_i} \times \prod_{j=1}^r (X^2 - \beta_j X + \gamma_j) \times \prod_{k=1}^m (X - u_k)^{2q_k+1}$$

on en déduit que

$$P_n S = \delta \prod_{i=1}^s (X - \alpha_i)^{2p_i} \times \prod_{j=1}^r (X^2 - \beta_j X + \gamma_j) \times \prod_{k=1}^m (X - u_k)^{2q_k+2}$$

garde un signe constant et n'est pas nul donc

$$(S|P_n) = \int_J S(x)P_n(x)\delta(x)dx$$

n'est pas nul. On en déduit que S n'est pas de degré strictement inférieur à P (qui est de degré n). Comme S ne peut pas être de degré supérieur à P_n on a $m = \deg(S) = n$.

- c) Le polynôme P_n étant de degré n . Il a n zéros (éventuellement complexes) comptés avec multiplicité. On vient de voir que $\#E_n = n$. Donc P_n a n zéros réels dans J de multiplicité impair. Il n'a donc pas d'autres zéros et de plus ils sont tous simples/
- 6) On note a et b (dans $\overline{\mathbb{R}}$) les bornes de J . Soit $n \geq 2$. On note \mathcal{H}_n le prédicat : « si on note $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ les zéros de P_n avec $u_1 < u_2 < \dots < u_n$, $\{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ ceux de P_{n-1} avec $v_1 < v_2 < \dots < v_{n-1}$ alors, pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $u_i < v_i < u_{i+1}$ ». Procédons par récurrence.
- Initialisation : Pour $n = 2$ on sait que $P_1 = X - v_1$ et $P_2 = (X - u_1)(X - u_2)$. On utilise que $P_2 = (X + \alpha_2)P_1 - \beta_2$ où $\beta_2 > 0$. En particulier, $P_2(v_1) = -\beta_2 < 0$. Comme $\lim_{a^+} P_2 > 0$ et $\lim_{b^-} P_2 > 0$, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires (P_2 est continue), on en déduit P_2 s'annule sur $]a, v_1[$ et sur $]v_1, b[$ et donc on a bien $u_1 < v_1 < u_2$.
- Hérité : Pour $n \geq 2$. On suppose \mathcal{H}_n et on veut montrer \mathcal{H}_{n+1} . Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, d'après \mathcal{H}_n , $P_{n-1}(v_i) = (v_i - u_1) \dots (v_i - u_i) \dots (v_i - u_{n-1})$ est du signe de $(-1)^{n-i}$ (les $i-1$ premiers facteurs dans le produit précédent sont strictement positifs et les $n-i$ derniers sont strictement négatifs). D'après la relation $P_{n+1} = (X + \alpha_{n+1})P_n - \beta_{n+1}P_{n-1}$ on en déduit que $P_{n+1}(v_i)$ est du signe de $(-1)^{n-i+1}$. De plus, comme P_{n+1} s'écrit $(X - w_1) \dots (X - w_{n+1})$ avec $a < w_1 < \dots < w_{n+1} < b$, $\lim_a P_{n+1}$ est du signe de $(-1)^{n+1}$ et $\lim_b P_{n+1}$ est strictement positive. De ce fait, par le théorème des valeurs intermédiaires, P_{n+1} s'annule au moins une fois sur chacun des intervalles $]a, v_1[$, $]v_1, v_2[$, \dots , $]v_n, b[$. On a ainsi les $n+1$ racines et donc $a < w_1 < v_1 < w_2 < \dots < v_n < w_{n+1} < b$, ce qu'il fallait démontrer.

Partie II - Polynômes de Laguerre

- 7) La fonction δ vérifie les conditions *i*) et *ii*). De plus pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$ est continue sur $[0, +\infty[$. De plus $x^n e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc $x \mapsto x^n e^{-x}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. La condition *iii*) est vérifiée.
- 8) On pose, si $n \in \mathbb{N}$: $f_n : x \mapsto x^n e^{-x}$ et $\lambda_n = (-1)^n$. On considère alors la fonction

$$\Pi_n : x \mapsto \lambda_n e^x f_n^{(n)}(x).$$

- a) On a $\boxed{\Pi_0 : x \mapsto 1 ; \Pi_1 : x \mapsto x - 1}$. De plus pour tout x dans \mathbb{R} , $f_2^{(2)} = 2e^{-x} - 4xe^{-x} + x^2e^{-x}$ d'après la formule de Leibniz. On en déduit que $\boxed{\Pi_2 : x \mapsto x^2 - 4x + 2}$.
- b) Soit n un entier naturel. On pose $u : x \mapsto x^n$. D'après la formule de Leibniz

$$f_n^{(n)} = (u\delta)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} \delta^{(n-k)}$$

On en déduit que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{n-k} e^{-x}$$

Finalement,

$$\Pi_n : x \mapsto \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(n!)^2}{((n-k)!)^2 k!} x^{n-k}.$$

La fonction Π_n est bien polynomiale de degré n et, si on note $\Pi_n = \sum_{k=0}^n a_{n,k} X^{n-k}$, on a :

$$\boxed{a_{n,k} = (-1)^k \frac{(n!)^2}{((n-k)!)^2 k!}}.$$

- c) i) On utilise comme ci-dessus la formule de Leibniz. Pour tout x dans \mathbb{R} ,

$$f_n^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} u^{(k)}(x) \delta^{(p-k)}(x) = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} (-1)^{p-k} e^{-x}.$$

On en déduit que $f_n^{(p)}(0) = 0$ car, dans la somme ci-dessus, $n-k > 0$ car $k \leq p < n$.

- ii) On déduit de la formule ci-dessus que $f_n^{(p)} \underset{+\infty}{\sim} \binom{p}{0} \frac{n!}{n!} x^n (-1)^p e^{-x} = (-1)^p x^n e^{-x}$.

- iii) Soit $i < j$,

$$(\Pi_i | \Pi_j) = (-1)^j \int_0^{+\infty} f_j^{(j)}(x) \Pi_i(x) dx$$

On intègre par parties en intégrant $f_j^{(j)}$ et en dérivant Π_i . On a alors

$$(\Pi_i | \Pi_j) = (-1)^j \left(\left[f_j^{(j-1)}(x) \Pi_i(x) \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f_j^{(j-1)}(x) \Pi_i'(x) dx \right).$$

Le terme « entre crochet » est nul d'après 8.c.i et 8.c.ii on a donc

$$(\Pi_i | \Pi_j) = (-1)^{j+1} \int_0^{+\infty} f_j^{(j-1)}(x) \Pi_i'(x) dx.$$

On peut alors itérer le procédé $i+1$ fois (ce qui est possible car $i < j$ donc l'ordre de dérivation de f_j reste positif ou nul) et on obtient que

$$(\Pi_i | \Pi_j) = (-1)^{j+i+1} \int_0^{+\infty} f_j^{(j-i-1)}(x) \Pi_i^{(i+1)}(x) dx.$$

Mais comme Π_i est de degré i , $\Pi_i^{(i+1)} = 0$ et donc $\boxed{(\Pi_i | \Pi_j) = 0}$.

- d) On a montré que la famille de polynôme (Π_i) vérifiant les conditions (A1) (en effet $a_{n,0} = 1$), (A2) d'après la question précédente. On en déduit alors qu'elle vérifie aussi (A3). Par unicité on a bien que pour tout entier n , $\Pi_n = P_n$.
- 9) On a $P_1 = \Pi_1 = X - 1$. Il a un unique zéro en $v_1 = 1$. On a aussi $P_2 = \Pi_2 = X^2 - 4X + 2$. Ses zéros sont $u_1 = \frac{4 - \sqrt{8}}{2} = 2 - \sqrt{2} < 1$ et $u_2 = 2 + \sqrt{2}$. On a bien que P_1 et P_2 ont que des zéros simples et qu'ils se trouvent dans $]0, +\infty[$. De plus on vérifie bien que $u_1 < v_1 < u_2$.

10) On pose $K_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

On sait que K_n est bien définie d'après la question 7). Ensuite, on procède par intégration par parties :

$$K_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = [-x^n e^{-x}]_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx.$$

On obtient donc que $K_n = nK_{n-1}$. Par récurrence, on obtient que $K_n = n!K_0$. Or $K_0 = 1$. Finalement $\boxed{K_n = n!}$.

11) $(P_n|P_n) = \int_0^\infty \lambda_n f_n^{(n)}(x) P_n(x) dx$. Intégrant n fois par parties, d'après 8)c), tous les crochets sont nuls.

On obtient

$$(P_n|P_n) = (-1)^n \int_0^\infty \lambda_n f_n(x) P_n^{(n)}(x) dx$$

Or P_n est de degré n et coefficient dominant 1, donc $P_n^{(n)} = n!$. De plus $\lambda_n = (-1)^n$.

Ainsi

$$(P_n|P_n) = n! \int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n! K_n = \boxed{(n!)^2}$$

12) a) Selon la question 4)c), $\beta_n = -C_{n,n-2} = (P_{n-1}|P_{n-1}) / (P_{n-2}|P_{n-2})$. Par la question précédente, on a donc

$$\boxed{\beta_n = (n-1)^2}$$

b) Evaluant en 0 la relation rappelée par l'énoncé,

$$P_n(0) = \alpha_n P_{n-1}(0) - \beta_n P_{n-2}(0)$$

Or pour tout naturel n , $P_n(0) = a_{n,n} = (-1)^n \frac{(n!)^2}{((n-n)!)^2 n!} = (-1)^n n!$ (cf question 8)b)).

Ainsi

$$\begin{aligned} (-1)^n n! &= \alpha_n (-1)^{n-1} (n-1)! - (n-1)^2 (-1)^{n-2} (n-2)! \\ n(n-1) &= -\alpha_n (n-1) - (n-1)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha_n = -(2n-1)}$$

13) On note $(b_{n,k})$ les coefficients de X^n dans la base (P_0, P_1, \dots, P_n) , c'est-à-dire :

$$X^n = \sum_{k=0}^n b_{n,k} P_{n-k}.$$

a) La famille (P_i) étant orthogonale, $(X^n|P_{n-k}) = b_{n,k} (P_{n-k}|P_{n-k})$. Donc

$$b_{n,k} = \frac{(X^n|P_{n-k})}{(P_{n-k}|P_{n-k})} = \frac{(X^n|P_{n-k})}{((n-k)!)^2}$$

Or, en procédant par intégration par parties successives (les crochets convergent et valent 0 comme à la question 8.c.iii)

$$\begin{aligned} (X^n|P_{n-k}) &= (-1)^{n-k} \int_0^{+\infty} x^n f_{n-k}^{(n-k)}(x) dx \\ &= (-1)^{n-k-1} n \int_0^{+\infty} x^{n-1} f_{n-k}^{(n-k-1)}(x) dx \\ &= \dots \\ &= n(n-1) \dots (k+1) \int_0^{+\infty} x^k f_{n-k}(x) dx \\ &= \frac{n!}{k!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx \\ &= \frac{(n!)^2}{k!} \end{aligned}$$

Finalement $b_{n,k} = \frac{(n!)^2}{k!((n-k)!)^2}$

b) On a $b_{n,k} = |a_{n,k}|$.

c) En utilisant la formule ci-dessus, $b_{n,0} = \frac{(n!)^2}{0!(n!)^2} = 1$. C'est prévisible car X^n et P_n sont unitaires de degré n et que, pour $k > 0$, $\deg(P_{n-k}) < n$.

Partie III - Densité

14) Comme (P_0, \dots, P_n) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$ (par A2 et A3), la famille (Q_0, \dots, Q_n) est une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$.

15) a) Soit n un entier naturel. D'après la question précédente, $S_n(f) = \sum_{i=0}^n (Q_i|f) Q_i = \sum_{i=0}^n c_i(f) Q_i$.

b) $d_\delta(f, \mathbb{R}_n[X]) = \|f - S_n(f)\|_\delta$, voir cours (on utilise le théorème de Pythagore).

c) Comme $S_n(f)$ et $f - S_n(f)$ sont orthogonaux, on a par Pythagore :

$$\|f - S_n(f)\|_\delta^2 = \|f\|_\delta^2 - \|S_n(f)\|_\delta^2$$

De plus $\|S_n(f)\|_\delta^2 = \sum_{k=0}^n (c_k(f))^2$ par la question a) et car (Q_0, \dots, Q_n) est orthonormale.

Ainsi $(d_\delta(f, \mathbb{R}_n[X]))^2 = \|f\|_\delta^2 - \sum_{k=0}^n (c_k(f))^2$.

d) Par la question précédente, la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{k \in \mathbb{N}} (c_k(f))^2$ est majorée (par $\|f\|_\delta^2$). Donc cette série converge, et ainsi son terme général tend vers zéro :

$(c_n(f))$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

16) f étant continue sur le segment $J = [-1, 1]$, le théorème de Weierstrass garantit que pour tout réel ϵ strictement positif, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - \tilde{P}|_J\|_\infty \leq \epsilon$ (où $\tilde{P}|_J$ désigne la restriction à J de la fonction polynômiale associée à P).

On a alors $\|f - \tilde{P}|_J\|_\delta \leq \epsilon\sqrt{2}$. Notant d le degré de P , on a $d_\delta(f, \mathbb{R}_d[X]) \leq \epsilon\sqrt{2}$.

De plus, la suite $(d_\delta(f, \mathbb{R}_n[X]))_{n \in \mathbb{N}}$ décroît car la suite $(\mathbb{R}_n[X])_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

On a donc $\forall n \geq d$, $d_\delta(f, \mathbb{R}_n[X]) \leq \epsilon\sqrt{2}$.

Par définition de la limite, $d_\delta(f, \mathbb{R}_n[X]) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Par la question 15)b), on a donc $d_\delta(f, S_n(f)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Ainsi la suite $(S_n(f))$ converge vers f pour la norme $\|\cdot\|_\delta$.

17) a) $u \mapsto u^n e^{\omega u}$ est continue sur $[0, +\infty[$, et $u^2 |u^n e^{\omega u}| = u^{n+2} e^{Re(\omega)u} \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} 0$, donc $u^n e^{\omega u} = o_{u \rightarrow +\infty}(1/u^2)$, et comme $u \mapsto 1/u^2$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, $u \mapsto u^n e^{\omega u}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Si $n \geq 1$, par intégration par parties,

$$\int_0^{+\infty} u^n e^{\omega u} du = \left[\frac{e^{\omega u}}{\omega} u^n \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{\omega u}}{\omega} n u^{n-1} du$$

car le crochet fait sens. Sa valeur est d'ailleurs $0 - 0 = 0$.

En effectuant n intégrations par parties, on obtient

$$\int_0^{+\infty} u^n e^{\omega u} du = (-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{e^{\omega u}}{\omega^n} n! u^0 du = (-1)^n \left[\frac{e^{\omega u}}{\omega^{n+1}} n! \right]_0^{+\infty} = \boxed{(-1)^{n+1} n \frac{n!}{\omega^{n+1}}}$$

i) f est continue et bornée sur J .

Ainsi $f^2(x)\delta(x) = O_{x \rightarrow +\infty}(e^{-\sqrt[4]{x}}) = o_{x \rightarrow +\infty}(1/x^2)$ car $x^2 e^{-\sqrt[4]{x}} = (\sqrt[4]{x})^8 e^{-\sqrt[4]{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ car $\sqrt[4]{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

$f^2\delta$ étant de plus continue sur J , elle est intégrable sur J .

Ainsi $f \in L^2_\delta$.

ii) Pour tout entier naturel n ,

$$\begin{aligned}
 (X^n|f) &= \int_0^\infty x^n \sin(\sqrt[4]{x}) e^{-\sqrt[4]{x}} \\
 &= \int_0^\infty u^{4n} \sin(u) e^{-u} 4u^3 du \text{ par le changement de variable } u \mapsto x = u^4 \text{ qui est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ et} \\
 &= 4 \operatorname{Im} \left(\int_0^\infty u^{4n+3} e^{(1-i)u} u^3 du \right) \\
 &= 4 \operatorname{Im} \left((-1)^{4n+4} \frac{(4n+3)!}{(1+i)^{4n+4}} \right) \\
 &= 4 \cdot (4n+3)! \operatorname{Im} (1/(\sqrt{2}e^{i\pi/4})^{4n+4}) \\
 &= 4 \cdot (4n+3)! \frac{1}{2^{2n+2}} \operatorname{Im} (e^{-i(n+1)\pi}) \\
 &= \boxed{0}
 \end{aligned}$$

Comme Q_n est une combinaison linéaire de monômes, $c_n(f) = (f|Q_n)$ est nul par linéarité à droite du produit scalaire.

iii) $S_n(f)$ est nulle pour tout naturel n , et f est non nulle, donc la suite $(S_n(f))$ ne converge pas vers f puisqu'elle converge vers la fonction nulle (et que sa limite est unique).