

On désigne par  $J$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  qui peut, selon le cas, être de la forme  $[a, b]$  ( $a < b$ ),  $] - \infty, a]$ ,  $[a, +\infty[$  ou  $] - \infty, +\infty[$ . On désigne alors par  $\overset{\circ}{J}$  l'intérieur de  $J$ .

On note  $\mathbb{R}[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{R}$  de degré au plus  $n$ .

Par abus de langage, on identifie, lorsque c'est utile, un polynôme  $P$ , élément de  $\mathbb{R}[X]$ , et la fonction polynomiale associée sur  $J$  car  $J$  est infini.

On désigne par  $\delta$  une application de  $J$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant les propriétés suivantes :

- i) La fonction  $\delta$  est continue sur  $J$ .
- ii) Pour tout  $x$  dans  $J$ ,  $\delta(x) > 0$ .
- iii) Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $x \mapsto x^n \delta(x)$  est intégrable sur  $J$ .

En particulier, si  $J = [a, b]$ , la propriété iii) est une conséquence de i).

Pour tout couple  $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ , on pose :

$$(P|Q) = \int_J P(x)Q(x)\delta(x)dx.$$

Si  $f$  est une fonction dérivable à l'ordre  $n$ , sa dérivée d'ordre  $n$  est notée  $f^{(n)}$ ; par convention  $f^{(0)} = f$ . Ainsi, la dérivée première sera notée indifféremment  $f'$  ou  $f^{(1)}$  et la dérivée seconde  $f''$  ou  $f^{(2)}$ .

### Partie I - Généralités

- 1) a) Montrer que  $(P, Q) \mapsto (P|Q)$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .  
b) Montrer que si  $P, Q$  et  $R$  sont trois polynômes,  $(RP|Q) = (P|RQ)$ .
- 2) Montrer l'existence et l'unicité d'une suite de polynômes  $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$  telle que
  - (A1) Pour tout  $i \in \mathbb{N}$  le terme de plus haut degré de  $P_i$  est  $X^i$ .
  - (A2) Pour tout  $(i, j)$  dans  $\mathbb{N}^2$ ,  $i \neq j \Rightarrow (P_i|P_j) = 0$ .
  - (A3) Pour tout entier  $n$ ,  $(P_0, \dots, P_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

*On pourra montrer par récurrence que pour tout entier  $n$ , la suite finie  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  existe et est unique.*

- 3) Montrer que pour tout entier  $n$  et tout polynôme  $Q$  de degré  $d$  strictement inférieur à  $n$ ,  $(P_n|Q) = 0$ .
- 4) On fixe  $n \geq 2$ .  
a) Montrer l'existence de  $n$  réels  $C_{n,0}; C_{n,1}; \dots; C_{n,n-1}$  tels que

$$P_n = XP_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n,k}P_k = (X + C_{n,n-1})P_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} C_{n,k}P_k.$$

b) Soit  $k \in \llbracket 0, n-3 \rrbracket$ . En calculant  $(P_n|P_k)$  montrer que  $C_{n,k} = 0$ . *On pourra utiliser les questions 1.b et 3.*

c) Exprimer  $C_{n,n-2}$  à l'aide de  $(P_{n-1}|P_{n-1})$  et de  $(P_{n-2}|P_{n-2})$ . En déduire que  $C_{n,n-2} < 0$ .

On pose dans ce qui suit  $\alpha_n = C_{n,n-1}$  et  $\beta_n = -C_{n,n-2}$  et on a donc

$$P_n = (X + \alpha_n)P_{n-1} - \beta_n P_{n-2}$$

où  $\beta_n > 0$ .

- 5) L'objet de cette question est l'étude des zéros de  $P_n$  lorsque  $n \geq 1$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on désigne par  $E_n$  l'ensemble des zéros réels de  $P_n$  appartenant à  $\overset{\circ}{J}$  et d'ordre de multiplicité impair.

- a) En considérant  $(P_0|P_n)$ , montrer que  $E_n$  est non vide. *On pourra étudier le signe de  $P_n$  sur  $J$  en supposant  $E_n$  vide.*

b) Soit donc  $E_n = \{u_1, \dots, u_m\}$  où  $1 \leq m \leq n$  avec  $u_1 < u_2 < \dots < u_m$ . On pose  $S = \prod_{k=1}^m (X - u_k)$ .

En considérant  $(S|P_n)$ , montrer que  $m = n$ .

c) Dédurre de ce qui précède que les zéros de  $P_n$  sont tous réels, simples et appartiennent à  $\mathring{J}$ .

6) On suppose  $n \geq 2$ . On note  $u_1, u_2, \dots, u_n$  les zéros de  $P_n$  avec  $u_1 < u_2 < \dots < u_n$  et  $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}$  ceux de  $P_{n-1}$  avec  $v_1 < v_2 < \dots < v_{n-1}$ .

Montrer, en utilisant la question 4 que pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ , on a :

$$u_i < v_i < u_{i+1}.$$

On pourra raisonner par récurrence sur  $n$ .

## Partie II - Polynômes de Laguerre

Dans cette partie,  $J = [0, +\infty[$  et on pose :  $\forall x \in J, \delta(x) = e^{-x}$ .

L'objet de cette partie est d'explicitier, avec cette densité particulière, la suite des polynômes  $P_n$  définie à la partie I.

7) Vérifier que  $\delta$  satisfait aux conditions imposées à une densité.

8) On pose, si  $n \in \mathbb{N} : f_n : x \mapsto x^n e^{-x}$  et  $\lambda_n = (-1)^n$ . On considère alors la fonction

$$\Pi_n : x \mapsto \lambda_n e^x f_n^{(n)}(x).$$

a) Donner les expressions de  $\Pi_0, \Pi_1$  et  $\Pi_2$ .

b) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $\Pi_n$  est une fonction polynomiale de degré  $n$ . On pose

$$\Pi_n = \sum_{k=0}^n a_{n,k} X^{n-k}.$$

En utilisant la formule de Leibniz, calculer  $a_{n,k}$ . On l'exprimera en fonction de  $(-1)^k, n!, k!$  et  $(n-k)!$ .

c) i) Montrer que pour tout  $p < n, f_n^{(p)}(0) = 0$ .

ii) Donner un équivalent de  $f_n^{(p)}(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  ( $n$  et  $p$  fixés avec  $p < n$ ).

iii) À l'aide d'intégrations par parties, calculer  $(\Pi_i|\Pi_j)$  pour  $i < j$ . *On déconseille d'utiliser les expressions explicites des coefficients de  $\Pi_n$ .*

d) En déduire que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}, P_n = \Pi_n$

9) Calculer les zéros de  $P_1$  et  $P_2$  et constater que les résultats des questions 5 et 6 sont vérifiés.

10) On pose  $K_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ . Calculer  $K_n$  en fonction de  $n$ .

11) Calculer  $(P_n|P_n)$ .

12) On rappelle les notations de la partie I :  $P_n = (X + \alpha_n)P_{n-1} - \beta_n P_{n-2}$ .

a) Calculer explicitement  $\beta_n$ .

b) Calculer  $\alpha_n$ . *On pourra évaluer la relation précédente en une valeur particulière.*

13) On note  $(b_{n,k})$  les coefficients de  $X^n$  dans la base  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ , c'est-à-dire :

$$X^n = \sum_{k=0}^n b_{n,k} P_{n-k}.$$

a) Calculer  $b_{n,k}$  à l'aide de  $n!, k!$  et  $(n-k)!$ .

b) Comparer  $b_{n,k}$  et  $|a_{n,k}|$ .

c) Vérifier que  $b_{n,0} = 1$ . Était-ce prévisible ?

### Partie III - Densité

On reprend le cas général. On note  $L_\delta^2$  l'ensemble des fonctions  $f$  continues sur  $J$  telles que  $f^2\delta$  est intégrable sur  $J$ . On admet que  $L_\delta^2$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^0(J, \mathbb{R})$  et que si  $f$  et  $g$  appartiennent à  $L_\delta^2$  alors  $\int_J fg\delta$  converge et que

$$(f, g) \mapsto (f|g) = \int_J fg\delta$$

est un produit scalaire sur  $L_\delta^2$ . On notera  $\|\cdot\|_\delta$  la norme associée et  $d_\delta$  la distance associée.

On remarquera que l'espace des fonctions polynomiales sur  $J$  est inclus dans  $L_\delta^2$  et que le produit scalaire ci-dessus prolonge celui défini dans le préambule.

On considère encore la suite de polynôme  $(P_i)$  définie à la question 2 et on note  $Q_i = \frac{1}{\sqrt{(P_i|P_i)}}P_i$ .

Pour tout fonction  $f$  de  $L_\delta^2$  et tout entier  $n$  on note  $c_n(f) = (f|Q_n) = \int_J fQ_n\delta$ .

14) Justifier que pour tout entier  $n$ ,  $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

15) Soit  $f \in L_\delta^2$ .

a) Soit  $n$  un entier naturel, exprimer à l'aide des polynômes  $Q_i$  la projection orthogonale de  $f$  sur  $\mathbb{R}_n[X]$  que l'on notera  $S_n(f)$ .

b) Question de cours : Justifier que  $d_\delta(f, \mathbb{R}_n[X]) = \|f - S_n(f)\|_\delta$ .

c) En déduire que  $(d_\delta(f, \mathbb{R}_n[X]))^2 = \|f\|_\delta^2 - \sum_{k=0}^n (c_k(f))^2$ .

d) Montrer que  $(c_n(f))$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

16) On suppose dans cette question que  $J = [-1, 1]$  et  $\delta : x \mapsto 1$  qui est une densité. Montrer que la suite  $(S_n(f))$  tend vers  $f$  (pour la norme  $\|\cdot\|_\delta$ ). On pourra utiliser le théorème d'approximation polynomiale de Weierstrass.

17) On suppose dans cette question que  $J = [0, +\infty[$  et  $\delta : x \mapsto e^{-\sqrt[4]{x}}$ .

a) Soit  $\omega$  un nombre complexe dont la partie réelle est strictement négative et  $n$  un nombre entier naturel. Justifier que  $u \mapsto u^n e^{\omega u}$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  et calculer  $\int_0^{+\infty} u^n e^{\omega u} du$ .

b) On pose  $f : x \mapsto \sin(\sqrt[4]{x})$ .

i) Justifier que  $f \in L_\delta^2$ .

ii) Calculer pour tout entier naturel  $n$ ,  $(X^n|f)$  et en déduire  $c_n(f)$ .

iii) En déduire que  $S_n(f)$  ne converge pas vers  $f$ .