

Semaine 18 - du 21 au 25 février

Topologie (fin) et Espaces préhilbertiens

Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Convergence et absolue convergence
Séries géométriques et exponentielles de matrices

Connexité par arcs

Chemin de A allant de x à y .
La relation $(x \mathcal{R}_A y) \iff$ (il existe un chemin de A de x à y) est une relation d'équivalence
Parties étoilée
On a les implications (convexe) \implies (étoilée) \implies (connexe par arcs) : réciproque fautive en général.
Composantes connexes par arcs
L'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs

Espaces préhilbertiens - Rappel du cours de 1ere année

Définition, exemples.
Inégalité de Cauchy-Schwarz.
Orthogonal d'un sous-espace. Familles orthogonales, orthonormales.
Théorème de Pythagore.
Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Projection orthogonale

Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E , F et F^\perp sont supplémentaires.
On appelle projection orthogonale p_F la projection sur F parallèlement à F^\perp .
Expression du projeté orthogonal à l'aide d'une base orthonormée de F
Distance à sous-espace vectoriel de dimension finie
Inégalité de Bessel

Familles totales

Une famille $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est dite totale si $\overline{\text{Vect}(e_i)} = E$.
Caractérisation à l'aide des projeté orthogonaux sur $\text{Vect}(e_i)_{0 \leq i \leq n}$.

Automorphismes orthogonaux

Définition d'un endomorphisme orthogonal
Préservation du produit scalaire par un endomorphisme orthogonal
Les endomorphismes orthogonaux sont des automorphismes
Groupe $O(E)$
Rappels sur les matrices orthogonales
Groupes $SO(n)$ et $SO(E)$

Automorphismes orthogonaux

Réduction des endomorphismes orthogonaux

Détermination des automorphismes orthogonaux directs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.

Endomorphismes symétriques

Définition d'un endomorphisme symétrique (ou auto-adjoint). Espace $\mathcal{S}(E)$.

Un projecteur est symétrique si et seulement s'il est orthogonal

Si \mathcal{B} est une base orthonormale, u est symétrique si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

Dimension de $\mathcal{S}(E)$.

Théorème spectral : Tout endomorphisme symétrique est diagonalisable en base orthonormale.

Théorème spectral : écriture matricielle