Dans tout ce chapitre I désignera un intervalle (non trivial) de $\mathbf{R}$ et F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie (notée p). On note $||.||$ la norme.

Nous allons définir la dérivabilité et l'intégration pour les fonctions de I dans F.

1 Dérivabilité

1.1 Dérivabilité en un point

Définition 1.1.1

Soit f une fonction de I dans F et $t_0 \in I$. On dit que f est dérivable en t_0 si la fonction

$$\varphi_{t_0} : \begin{array}{ccc} I \setminus \{x_0\} & \to & F \\ t & \mapsto & \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} \end{array}$$

a un limite en t_0.

Dans ce cas, la fonction f est dite dérivable en t_0, la limite s'appelle dérivée de f en t_0 et on note

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}.$$

Remarques :

1. L'élément $f'(t_0)$ est un élément de F.
2. Dans le cas où $F = \mathbf{R}^2$ ou $F = \mathbf{R}^3$, une application $f : t \to F$ peut être imaginée comme le déplacement d'un point dans F en fonction du paramètre t (en voyant F comme un espace affine et plus un espace vectoriel). Dans ce cas, $f'(t_0)$ s'appelle le vecteur vitesse.

Proposition 1.1.2 (Expression en coordonnées)

Avec les mêmes notations. Si on note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F, on pose pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$,

$$f_i = e_i^* \circ f : I \longrightarrow \mathbf{K}$$

(c'est-à-dire que pour tout t dans I, $f(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t) e_i$)

1. La fonction f est dérivable en t_0 si et seulement si toutes les f_i sont dérivables en t_0.
2. Dans ce cas, $f'(t_0) = \sum_{i=1}^{p} f_i'(t_0) e_i$

Démonstration : Ce n'est qu'un cas particulier du théorème analogue sur les limites. □

Exemple : On considère l'espace vectoriel $F = \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et $\mathscr{B}$ la base canonique. Pour savoir si une application est dérivable, on peut regarder coordonnée par coordonnée. Par exemple si on étudie

$$f : t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Chaque application coordonnée est dérivable en $t_0 \in \mathbf{R}$ donc f est dérivable en t_0 et

$$f'(t_0) = \begin{pmatrix} -\sin t_0 & -\cos t_0 \\ \cos t_0 & -\sin t_0 \end{pmatrix} = f\left(t_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Nous allons donner une définition « à la Taylor-Young » de la dérivabilité, il faut au préalable donner un sens à $o(h)$.

Définition 1.1.3

On note, pour tout entier k, $\underset{h \to 0}{o}\left(h^k\right)$ une fonction définie d'un voisinage de 0 dans F de la forme $h \mapsto h^k \varepsilon(h)$ où ε tend vers 0 quand h tend vers 0.

Remarque : On peut de même définir $\underset{t \to t_0}{o}\left((t - t_0)^k\right)$. La plupart du temps, on omettra de préciser au voisinage de quel point on travaille en indice.

Proposition 1.1.4 (Interprétation à la Taylor-Young)

Avec les notations précédentes, f est dérivable en t_0 si et seulement s'il existe $\alpha \in F$ tel que

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + h\alpha + \underset{0}{o}(h).$$

Dans ce cas, $f'(t_0) = \alpha$.

Démonstration : La démonstration est analogue au cas réel.

$$\begin{aligned} \exists \alpha \in E, f(t_0 + h) = f(t_0) + h\alpha + \underset{0}{o}(h) &\iff \exists \alpha \in E, \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \alpha + \underset{0}{o}(1) \\ &\iff \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \alpha \end{aligned}$$

□

Exemple : En reprenant notre exemple ci-dessus,

$$\begin{aligned} f(t_0+h) &= \begin{pmatrix} \cos(t_0+h) & -\sin(t_0+h) \\ \sin(t_0+h) & \cos(t_0+h) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t_0 - h\sin t_0 + o\,(h) & -\sin t_0 - h\cos t_0 + o\,(h) \\ \sin t_0 + h\cos t_0 + o\,(h) & \cos t_0 - h\sin t_0 + o\,(h) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t_0 & -\sin t_0 \\ \sin t_0 & \cos t_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} -\sin t_0 & -\cos t_0 \\ \cos t_0 & -\sin t_0 \end{pmatrix} + o\,(h) \end{aligned}$$

Définition 1.1.5 (Dérivabilité à droite et à gauche)

Avec les mêmes notations

1. *Si t_0 n'est pas la borne inférieure de I, f est dite dérivable à gauche en t_0 si φ_{t_0} a une limite quand $t \longrightarrow t_0^-$. La dérivée à gauche est notée $f_g'(t_0)$.*
2. *Si t_0 n'est pas la borne supérieure de I, f est dite dérivable à droite en t_0 si φ_{t_0} a une limite quand $t \longrightarrow t_0^+$. La dérivée à droite est notée $f_d'(t_0)$.*

Définition 1.1.6

Soit f une fonction de I dans F.

1. *Elle est dite dérivable si elle est dérivable en tout point t_0 de I. On note alors f' sa fonction dérivée définie sur I par :*
$$f' : t \mapsto f'(t).$$
2. *Elle est dite de classe $\mathscr{C}^1$ si elle est dérivable et que sa fonction dérivée est continue.*

1.2 Opérations

Proposition 1.2.7

Une combinaison linéaire de fonction dérivables est dérivable. L'ensemble des fonctions dérivables est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions.

Démonstration : Il suffit de recopier la preuve usuelle.

Proposition 1.2.8

Soit G un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit f une fonction de I dans F et $L : F \longrightarrow G$ une application linéaire.

1. Si f est dérivable en t_0 alors $L \circ f$ est dérivable en t_0 et
$$(L \circ f)'(t_0) = L(f'(t_0))$$
2. Si f est dérivable alors $L \circ f$ est dérivable et
$$(L \circ f)' = L \circ f'$$

Démonstration :

1. On étudie
$$\frac{L(f(t_0+h)) - L(f(t_0))}{h} = L\left(\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}\right) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} L(f'(t_0))$$
car L est continue (application linéaire entre deux espaces vectoriels normés de dimension finie). On en déduit bien que $L \circ f)$ est dérivable en t_0 et que $(L \circ f)'(t_0) = L(f'(t_0))$.
2. Il suffit d'appliquer 1. en tout t_0 de I.

□

Remarque : Ce résultat sera généralisée dans le chapitre sur le calcul différentiel (chain rule)
Exemple : On reprend notre application $f : I \longrightarrow F = \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ définie par :
$$f : t \longmapsto f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$
Pour tout matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, on peut regarder
$$L : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$$
Elle est linéaire ; on en déduit que
$$L \circ f : t \longmapsto Af(t)$$
est dérivable et de dérivée : $t \longmapsto Af'(t)$.

Proposition 1.2.9

Soit G, H des espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit f et g des fonctions de I dans F et de I dans G. Soit $B : F \times G \longrightarrow H$ une application bilinéaire.

1. Si f et g sont dérivables en t_0 alors $t \longmapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable en t_0 et
$$(B(f,g))'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0)).$$
2. Si f et g sont dérivables alors $t \longmapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable et
$$(B(f,g))' = B(f', g) + B(f, g').$$

Démonstration : La preuve est semblable à la preuve de la dérivabilité d'un produit. Précisément, pour tout h proche de 0

$$B(f(t_0+h),(g(t_0+h))=B(f(t_0)+hf'(t_0)+h\varepsilon_1(h),g(t_0)+hg'(t_0)+h\varepsilon_2(h))$$

où ε_1 et ε_2 tendent vers 0 quand $h\to 0$. On a donc, par bilinéarité :

$$B(f(t_0+h),g(t_0+h))=B(f(t_0),g(t_0))+h\left[B(f(t_0),g'(t_0))+B(f'(t_0),g(t_0))\right]+h\alpha(h)$$

où

$$\alpha(h)=B(f(t_0),\varepsilon_2(h))+hB(f'(t_0),g'(t_0))+hB(f'(t_0),\varepsilon_2(h))+hB(\varepsilon_1(h),g'(t_0))+hB(\varepsilon_1(h),\varepsilon_2(h))+B(\varepsilon_1(h),g(t_0)))$$

Comme B est bilinéaire et que F,G sont de dimension finie, il existe $C>0$ tel que

$$\forall (x,y)\in F\times G, ||B(x,y)||_H\leqslant C||x||_F.||y||_G.$$

Montrons que les 6 termes de α tendent vers 0 quand h tend vers 0.

— $||B(f(t_0),\varepsilon_2(h))||_H\leqslant C||f(t_0)||_F.||\varepsilon_2(h)||_G \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ car $\varepsilon_2(h)\underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.

— $||hB(f'(t_0),g'(t_0))||_H\leqslant |h|.||B(f'(t_0),g'(t_0))||_H \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$

— les autres termes se traitent de manière similaire.

On en déduit que $\lim\limits_{h\to 0}\alpha(h)=0$, c'est-à-dire que

$$B(f(t_0+h),(g(t_0+h))=B(f(t_0),g(t_0))+h\left[B(f(t_0),g'(t_0))+B(f'(t_0),g(t_0))\right]+o\left(h\right)$$

ce qui signifie que $B(f,g)$ est dérivable en t_0 et que

$$(B(f,g))'(t_0)=B(f'(t_0),g(t_0))+B(f(t_0),g'(t_0)).$$

□

Remarque : On peut étendre cela aux applications multilinéaires. Par exemple si F est de dimension n et $f_1,\dots,f_n$ sont des applications dérivables de I dans F, $\Phi : t\mapsto \det(f_1(t),\dots f_n(t))$ est dérivable et

$$\Phi'(t)=\sum_{p=1}^{n}\det(f_1(t),\dots,f_{p-1}(t),f_p'(t),f_{p+1}(t),\dots,f_n(t))$$

Cela se démontre en reprenant la preuve du cas bilinéaire.

Exemple :

Exercice : Pour tout n on pose

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \frac{x^3}{3!} & \frac{x^2}{2!} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \cdots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$$

Calculer $D_n(x)$. On pourra commencer par calculer sa dérivée.

Proposition 1.2.10

Soit f une fonction de I dans F. Soit φ une fonction de J dans I où J est un intervalle de $\mathbf{R}$.

1. Soit $x_0 \in J$, on pose $t_0 = \varphi(x_0)$. Si φ est dérivable en x_0 et f est dérivable en t_0 alors $f \circ \varphi$ est dérivable en x_0 et
$$(f \circ \varphi)'(x_0) = \varphi'(x_0) f'(\varphi(x_0))$$
2. Si f et φ sont dérivables alors $f \circ \varphi$ aussi et
$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi).$$

Démonstration : Là encore, il suffit de recopier la preuve usuelle. Pour h proche de 0

$$\begin{aligned} f(\varphi(x_0 + h)) &= f\big(\varphi(x_0) + h\varphi'(x_0) + h\varepsilon_1(h)\big) \\ &= f(\varphi(x_0)) + (h\varphi'(x_0) + h\varepsilon_1(h)) f'(\varphi(x_0)) + (h\varphi'(x_0) + h\varepsilon_1(h))\varepsilon_2(h\varphi'(x_0) + h\varepsilon_1(h)) \\ &= f(\varphi(x_0)) + h\varphi'(x_0) f'(\varphi(x_0)) + h\alpha(h) \end{aligned}$$

où $\alpha(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$. □

1.3 Dérivées successives

Définition 1.3.11

Soit f une fonction de I dans F. On définit le fait que f soit de classe $\mathscr{C}^n$ par récurrence :

- *On dit que f est de classe $\mathscr{C}^0$ si f est continue.*
- *Pour tout $n \geqslant 1$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ si f est dérivable et que f' est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$.*

On dit alors que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, si pour tout entier n elle est de classe $\mathscr{C}^n$.
On note $\mathscr{C}^n(I, F)$ et $\mathscr{C}^\infty(I, F)$ l'ensemble des fonctions de classes $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) de I dans F.

Notation : Soit f de classe $\mathscr{C}^n$, on pose
$$f^{(0)} = f ; f^{(1)} = f' \text{ et } \forall k \in [\![\, 1 \,; n \,]\!]\ f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$$

Remarque : Si $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F. On pose pour tout $i \in [\![\, 1 \,; p \,]\!]$, $f_i = e_i^* \circ f$. On a alors que f est de classe $\mathscr{C}^n$ si et seulement si tous les f_i sont de classe $\mathscr{C}^n$.

Proposition 1.3.12

On reprend les notations précédentes.

1. Soit $(f, g) \in \mathscr{C}^n(I, F)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^n(I, F)$ et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$. En particulier, $\mathscr{C}^n(I, F)$ et $\mathscr{C}^\infty(I, F)$ sont des espaces vectoriels.
2. Soit $f \in \mathscr{C}^n(I, F)$ et $L \in \mathscr{L}(F, G)$, $L \circ f \in \mathscr{C}^n(I, G)$ et $(L \circ f)^{(n)} = L \circ f^{(n)}$
3. Soit B une application bilinéaire de F dans F, $(f, g) \in \mathscr{C}^n(I, F)$ alors $B(f, g) \in \mathscr{C}^n(I, G)$ et
$$(B(f, g))^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} B(f^{(p)}, g^{(n-p)}) \quad \text{(Formule de Leibniz)}$$

2 Intégration sur un segment

On s'intéresse maintenant à l'intégration. On se contente de l'intégration des fonctions continues par morceaux sur **un segment**. On notera donc $I = [a, b]$

2.1 Définitions

Définition 2.1.13 (Fonctions continues par morceaux)

Une fonction f de I dans F est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b)$ telle que

i) Pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $f_{]t_{i-1},t_i[}$ est continue

ii) La fonction f à des limites à gauches en tout les t_i (pour $i \in [\![0 ; n-1]\!]$) et à droite en tout les t_i (pour $i \in [\![1 ; n]\!]$).

Remarques :

1. Soit f une fonction continue par morceaux de I dans F. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. Les fonctions $e_i^* \circ f$ sont continues par morceaux sur I.
2. On notera $\mathscr{C}\mathscr{M}(I, F)$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux.

Proposition-Définition 2.1.14

Soit f une fonction continue par morceaux de I dans F. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F,

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b e_i^* \circ f \right) e_i$$

ne dépend pas du choix de la base. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ et on note $\displaystyle\int_a^b f$ ce terme.

Remarque : Cela correspond à ce qui a été fait pour définir l'intégrale d'une fonction complexe en posant

$$\int_a^b f = \left(\int_a^b \mathfrak{Re}(f) \right) + i \left(\int_a^b \mathfrak{Im}(f) \right).$$

Démonstration : Fixons les notations. On se donne $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $\mathscr{B}' = (e_1', \ldots, e_p')$ deux bases de F. Soit P la matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et $Q = P^{-1}$. On note (α_{ij}) les coefficients de Q.

Maintenant, on note $f_i = e_i^* \circ f$ et $g_i = (e_i')^* \circ f$.

On considère pour tout $t \in I$, $X(t) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ et $Y(t) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(t)) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$.

Les formules de changement de base donnent que pour tout $t \in I$, $Y(t) = P^{-1}X(t) = QX(t)$. C'est-à-dire que pour tout t dans I et tout i dans $[\![1 ; p]\!]$

$$g_i(t) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} f_j(t)$$

En intégrant on obtient

$$\int_a^b g_i = \int_a^b \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} f_j = \sum_{j=1}^{p} \int_a^b \alpha_{ij} f_j.$$

En faisant la somme on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p}\left(\int_a^b g_i\right)e'_i &= \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{j=1}^{p}\int_a^b \alpha_{ij}f_j\right)e'_i \\
&= \sum_{j=1}^{p}\left[\left(\int_a^b f_j\right)\sum_{i=1}^{p}\alpha_{ij}e'_i\right] \\
&= \sum_{j=1}^{p}\left(\int_a^b f_j\right)e_j
\end{aligned}$$

□

Notation : On notera

$$\int_{[a,b]} f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(t)dt.$$

2.2 Propriétés de l'intégrale

Théorème 2.2.15 (Propriétés)

1. L'intégrale $\int_a^b$ est une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathscr{C}\mathscr{M}(I,F)$ dans F.
2. Soit $c \in [a,b]$ et $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}(I,F)$,
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad \text{(Relation de Chasles)}$$
3. Soit $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}(I,F)$, $||f|| \in \mathscr{C}\mathscr{M}(I,\mathbf{R})$ et
$$\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b ||f|| \quad \text{(Inégalité triangulaire)}$$
4. Soit $f \in \mathscr{C}\mathscr{M}(I,F)$, $||f|| \in \mathscr{C}\mathscr{M}(I,\mathbf{R})$ et
$$\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant (b-a)\sup_{t\in[a,b]}||f(t)|| \quad \text{(Formule de la moyenne)}$$

Démonstration :

1. On considère une base $\mathscr{B} = (e_1,\ldots,e_p)$. Soit $(f,g) \in \mathscr{C}\mathscr{M}(I,F)^2$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, il suffit de voir que coordonnées par coordonnées, on a
$$\int_a^b e_i^*(\lambda f + g) = \int_a^b \lambda e_i^*(f) + e_i^*(g) = \lambda\int_a^b e_i^*(f) + \int_a^b e_i^*(g).$$
2. Là encore, il suffit de décomposer dans une base et de revenir à la propriété analogue pour l'intégrale des fonctions scalaires.

3.

□

Définition 2.2.16 (Sommes de Riemann)

Soit $f : I \longrightarrow F$ et $\sigma = (t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b)$ une subdivision de I. On se donne un élément $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \prod_{i=1}^{n} [t_{i-1}, t_i]$. On appelle somme de Riemann associée à f, σ et α et on note $S(f, \sigma, \alpha)$,

$$S(f, \sigma, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) f(\alpha_i) \in F.$$

Remarque : Dans le cadre du programme, on ne considère que des subdivisions à pas réguliers avec α_i pris « à gauche ». C'est-à-dire, σ définie par $t_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$ et pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$, $\alpha_i = t_{i-1}$.

C'est-à-dire

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

Théorème 2.2.17

Soit $f \in \mathscr{C}^0(I, F)$,

$$\lim_{n \to \infty} S_n(f) = \int_a^b f$$

Démonstration : Il suffit de décomposer dans une base. Précisément, soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base. On voit que pour tout entier n,

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{p} f_i\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)e_i = \sum_{i=1}^{p} S_n(f_i)e_i$$

Dans le cours de première année, on a vu le résultat analogue pour les fonctions à valeurs réelles, c'est-à- dire que, pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f_i) = \int_a^b f_i$$

Cela implique que

$$\lim_{n\to\infty} S_n(f) = \sum_{i=1}^{p}\left(\int_a^b f_i\right)e_i = \int_a^b f$$

□

Démonstration de l'inégalité triangulaire :

On peut maintenant démontrer l'inégalité triangulaire (et on obtiendra la formule de la moyenne comme corollaire).

Avec les notations précédentes, on sait que

$$S_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$$

et que

$$S_n(||f||) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b ||f||$$

Il suffit alors de remarquer que

$$||S_n(f)|| = \left\|\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right\| \leqslant \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} ||f||\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) = S_n(||f||).$$

En passant à la limite on a bien,

$$\left\|\int_a^b f\right\| \leqslant \int_a^b ||f||.$$

□

3 Intégrale fonction de sa borne supérieure

3.1 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème 3.1.18 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit I un intervalle (non nécessairement un segment) et f une fonction de I dans F et $a \in I$.
Si f est continue, la fonction $H : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ définie sur I est de classe $\mathscr{C}^1$. De plus, $H' = f$, de ce fait, H est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration : Il suffit, via une base de F, de revenir à la démonstration classique dans le cas des fonctions scalaires.

□

Remarque : Avec les mêmes hypothèses, $x \mapsto \displaystyle\int_x^a f(t)dt$ est une primitive de $-f$.

Corollaire 3.1.19

Soit f une fonction continue sur I et H une primitive de f sur I,

$$\int_a^b f = [H]_a^b$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser que H étant une primitive de f, il existe une constante C telle que

$$\forall x \in I, H(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

On en déduit que

$$H(b) - H(a) = \int_a^b f(t)dt + C - \int_a^a f(t)dt - C = \int_a^b f(t)dt.$$

□

3.2 Inégalités des accroissements finis

ATTENTION

Le lemme de Rolle ou le théorème des accroissements finis ne sont plus vraie quand $F \neq \mathbf{R}$. En effet on peut « tourner » autour d'un éventuel zéro. Par exemple

$$f : t \mapsto e^{it} - 1$$

s'annule en 0 et en 2π, pourtant, $\forall t \in [0, 2\pi], f'(t) = ie^{it} \neq 0$.

Proposition 3.2.20 (Inégalités des accroissements finis)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans F. Soit $a, b \in I$ avec $a \leqslant b$.

$$\forall (a,b) \in I^2, ||f(b) - f(a)|| \leqslant |b-a| \sup_{t \in [a,b]} ||f'(t)||$$

Remarque : La borne supérieure existe (c'est même un maximum) car la fonction f' est continue sur le segment $[a, b]$
Démonstration : Avec les notations de l'énoncé,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

Par inégalité triangulaire,

$$||f(b) - f(a)|| \leqslant \int_a^b ||f'(t)||dt$$

On peut alors utiliser l'inégalité de la moyenne

$$||f(b) - f(a)|| \leqslant \int_a^b ||f'(t)||dt \leqslant |b-a| \sup_{t \in [a,b]} ||f'(t)||.$$

□

4 Formules de Taylor

4.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Proposition 4.1.21

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ de I vers F. Pour tout $(a,b) \in I^2$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + R_n \quad \text{où} \quad R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt.$$

Démonstration : Il suffit, via une base de F, de revenir à la démonstration classique dans le cas des fonctions scalaires.

Remarques :

1. Dans le cas $n = 0$, on retrouve le théorème fondamental de l'analyse : $f(b) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f(t)dt$.
2. En posant $b = a + h \iff h = b - a$ on obtient

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)h^k}{k!} + R_n \quad \text{où} \quad R_n = \int_a^b \frac{(a+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \int_a^b \frac{(h-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+u)dt$$

en posant $t = a + u$ dans l'intégrale.

Proposition 4.1.22 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ de I vers F. Pour tout $(a,b) \in I^2$,

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} \right\| = ||R_n|| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,b]} ||f^{(n+1)}||.$$

Remarque : La fonction $f^{(n+1)}$ est continue. Elle est donc bien bornée sur le segment $[a,b]$.

Démonstration : On utilise l'inégalité triangulaire puis l'inégalité de la moyenne

$$\left\| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \right\| \leqslant \int_a^b \left\| \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right\| dt \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,b]} ||f^{(n+1)}||.$$

□

4.2 Formule de Taylor-Young

Théorème 4.2.23 (Formule de Taylor-Young)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ de I dans F. Pour tout $a \in I$,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n)$$

en posant $h = x - a$,

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \underset{h \to 0}{o}(h^n)$$

Démonstration : On revient encore au cas scalaire. En effet soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. Pour tout $i \in [\![1 ; p]\!]$, on pose $f_i = e_i^* \circ f$ de fait que

$$f : x \mapsto \sum_{i=1}^{p} f_i(x) e_i$$

On peut appliquer la formule de Taylor-Young à chaque f_i qui est de classe $\mathscr{C}^n$.

$$\forall x \in I, f_i(x) = f_i(a) + (x-a) f_i'(a) + \cdots + (x-a)^n \frac{f_i^{(n)}(a)}{n!} + (x-a)^n \varepsilon_i(x)$$

où $\varepsilon_i(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \cdots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + (x-a)^n \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i(x) e_i.$$

Maintenant, en posant $\varepsilon : x \mapsto \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i(x) e_i$ qui tend vers 0 quand x tend vers a, on a bien,

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \cdots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + (x-a)^n \varepsilon(x).$$

□

ATTENTION

La formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange sont des formules globales. Elles donnent des informations sur les valeurs de f dans tout l'intervalle. La formule de Taylor-Young en a est par contre locale. On n'en tire que des informations au voisinage du point a.

5 Suites et séries de fonctions à valeurs vectorielles

Dans le chapitre 5 on a étudié les suites et séries de fonctions définies sur une partie X d'un espace vectoriel de dimension finie (souvent $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) et à valeurs dans un corps $\mathbf{K}$. Nous allons étendre les résultats de ce chapitre au cas des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie.

5.1 Généralités

Dans ce paragraphe, les fonctions sont définie sur un ensemble X.

Définition 5.1.24 (Convergence des suites de fonctions)

Soit (f_n) une suite de fonction définie sur un ensemble X et à valeurs dans F. Soit $f : X \to F$.

1. *On dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f et on note $(f_n) \xrightarrow{CS} f$ si et seulement si, pour tout x de X la suite $(f_n(x))$ tend vers $f(x)$.*
2. *On dit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f et on note $(f_n) \xrightarrow{CU} f$ si et seulement si,*
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N},\ \forall n \geqslant N,\ \forall x \in X,\ ||f_n(x) - f(x)|| \leqslant \varepsilon$$
Cela revient à dire qu'à partir d'un certain rang, les fonctions $f_n - f$ sont bornées et $||f_n - f||_\infty \to 0$.

Remarque : Ces deux notions ne dépendent pas de la norme sur F car toutes les normes sont équivalentes sur F.

Définition 5.1.25 (Convergence des séries de fonctions)

Soit (f_k) une suite de fonction définie sur un ensemble X et à valeurs dans F. On considère la série de fonctions $\left(\sum\limits_{k\geqslant 0} f_k\right)$

1. *On dit que la série de fonction $\left(\sum\limits_{k\geqslant 0} f_k\right)$ converge simplement vers la fonction S si la suite des sommes partielles $S_n : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$ converge simplement vers la fonction S.*
2. *On dit que la série de fonction $\left(\sum\limits_{k\geqslant 0} f_k\right)$ converge uniformément vers la fonction S si la suite des sommes partielles $S_n : x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$ converge uniformément vers la fonction S.*
3. *On dit que la série de fonction $\left(\sum\limits_{k\geqslant 0} f_k\right)$ converge normalement si les fonctions f_k sont bornées et que la série numérique à termes positifs $\left(\sum\limits_{k\geqslant 0} ||f_k||_\infty\right)$ converge.*

Proposition 5.1.26

Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et que la suite des restes converge uniformément vers 0.

Exemple : Soit $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \\ & A & \longmapsto & \dfrac{A^n}{n!} \end{array}$$

Théorème 5.1.27

Soit $\left(\sum_{n \geqslant 0} f_n\right)$ une série de fonctions. Si elle converge normalement alors elle converge uniformément.

Démonstration : Pour montrer que la série converge uniformément, on va montrer qu'elle converge simplement et que la série des restes converge uniformément vers 0.

ATTENTION

Il faut faire attention à ne pas confondre $||.||$ qui désigne la norme de l'espace vectoriel F avec $||.||_\infty$ qui désigne la norme infinie de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(X, F)$.

— Soit $x \in X$, on a que pour tout entier n, $||f_n(x)|| \leqslant ||f_n||_\infty$. Par comparaison de série à termes positifs, on en déduit que la série $\left(\sum_{n \geqslant 0} ||f_n(x)||\right)$ converge car la série $\left(\sum_{n \geqslant 0} ||f_n||_\infty\right)$ converge. De ce fait, la série $\left(\sum_{n \geqslant 0} f_n(x)\right)$ est absolument convergente donc convergente car F est un espace vectoriel de dimension finie. La série de fonctions converge donc simplement.

— On considère alors le reste de la série. Pour tout $x \in X$:

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x) \right\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} ||f_n(x)|| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} ||f_n||_\infty$$

On en déduit qu' en notant $x \mapsto R_n(x)$ le reste de la série de fonctions

$$||x \mapsto R_n(x)||_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} ||f_n||_\infty$$

On en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} ||R_n||_\infty = 0$$

De ce fait, la série des fonctions des restes tend uniformément vers 0.

En conclusion la série de fonctions $\left(\sum_{n \geqslant 0} f_n\right)$ converge uniformément. □

Exemple : La série exponentielle converge uniformément sur toute partie bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

5.2 Continuité et théorème de la double limite

On suppose maintenant que X est une partie d'un espace vectoriel normé E. On note $||.||_E$ la norme de E. Les théorèmes sur la continuité des suites et des séries de fonctions se généralisent directement.

Théorème 5.2.28 (Continuité de la limite d'une suite de fonctions)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur X et à valeurs dans F qui converge (simplement) vers une fonction f.

1. Soit $x_0 \in X$. On suppose que
   i) Les fonctions f_n sont continues en x_0.
   ii) Il existe un voisinage de x_0 dans X tel que la suite de fonctions converge uniformément.

   Alors la fonction f est continue en x_0.
2. On suppose que
   i) Les fonctions f_n sont continues sur X
   ii) Pour tout x_0 de X, il existe un voisinage de x_0 dans X tel que la suite de fonctions converge uniformément .

   Alors f est continue sur X.

Théorème 5.2.29 (Continuité de la somme d'une série de fonctions)

Soit $\left(\sum_{n\geqslant 0} f_n\right)$ une suite de fonctions définies sur X et à valeurs dans F qui converge (simplement) vers une fonction S.

1. Soit $x_0 \in X$. On suppose que
   i) Les fonctions f_n sont continues en x_0.
   ii) Il existe un voisinage de x_0 dans X tel que la série de fonctions converge uniformément .

   Alors la fonction S est continue en x_0.
2. On suppose que
   i) Les fonctions f_n sont continues sur X
   ii) Pour tout x_0 de X, il existe un voisinage de x_0 dans X tel que la série de fonctions converge uniformément .

   Alors S est continue sur X.

Exemple : On reprend la série exponentielle de matrice.

Pour tout entier naturel k, $f_k : A \mapsto \dfrac{A^k}{k!}$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ par continuité du produit matriciel.

De plus, pour tout $A_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. La boule ouverte $B(0_E, ||A_0|| + 1)$ est un voisinage de A_0 qui est borné. De ce fait, la série de fonctions converge normalement donc uniformément sur cette boule.

On en déduit que $A \mapsto \exp(A)$ est une fonction continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

ATTENTION

La série de fonctions **ne** converge **pas** uniformément sur tout $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Exercice : Montrer $A \mapsto (I - A)^{-1}$ est continue sur un voisinage ouvert de 0_E.

On peut aussi généraliser le théorème de la double limite.

Théorème 5.2.30 (Théorème de la double limite)

Soit (f_n) une suite de fonctions de X dans F et $f \in \mathscr{F}(X, F)$. Soit a un point adhérent à X. On suppose que

i) La suite (f_n) converge **uniformément** vers f sur un voisinage de a dans X.

ii) pour tout n, f_n admet en a une limite $\ell_n \in F$.

Alors la suite (ℓ_n) admet une limite ℓ et $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$. C'est-à-dire

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right) = \ell = \lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right).$$

Remarque : La démonstration est la même que dans le cas étudié au chapitre 5. Il est important que l'espace d'arrivé soit de dimension finie. En effet, pour montrer que la suite (ℓ_n) a une limite finie, on utilise que c'est une suite bornée et on en extrait alors une sous-suite convergente d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. On peut généraliser cela en utilisant qu'une boule fermée bornée **en dimension finie** est compacte.

Théorème 5.2.31 (Double limite pour les séries de fonctions)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur X et a un point adhérent à A. On suppose que

i) La série de fonctions converge uniformément vers S au voisinage de a

ii) pour tout n, f_n admet en a une limite $\ell_n \in F$.

Alors la série $\sum \ell_n$ converge (vers ℓ) et $\lim_{x \to a} S(x) = \ell$. C'est-à-dire :

$$\lim_{x \to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right).$$

5.3 Intégration et dérivation

Nous allons maintenant généraliser l'intégration et la dérivation des suites et séries de fonctions dans le cas des fonctions à valeurs vectorielles.

Théorème 5.3.32

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans F. Soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans F. On suppose que

i) Les fonctions f_n sont continues.

ii) La suite de fonctions converge uniformément sur tout segment J inclus dans I.

Soit $a \in I$, on pose $H_n : x \mapsto \int_a^x f_n(t)dt$ et $H : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$. La suite (H_n) converge uniformément vers H sur tout segment J de I.

Démonstration : Il suffit de le démontrer coordonnées par coordonnées sur une base de F. □

Il existe une « version série ».

Théorème 5.3.33 (Intégration des séries de fonctions)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans F. On suppose que

i) Pour tout entier n, f_n est continue

ii) La série de fonctions converge uniformément sur tout segment J vers S

Pour tout a de I on pose $H_n : x \mapsto \int_a^x f_n$ la primitive de f_n qui s'annule en a. Alors la série $\sum H_n$ converge uniformément sur tout segment J de I vers $x \mapsto \int_a^x S$. C'est-à-dire,

$$\forall x \in I, \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n = \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

Remarque : En particulier si $I = [a, b]$ on obtient $\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n\right) = \int_a^b f$ dans le premier cas et $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$ dans le deuxième cas.

Les théorèmes sur la dérivation se généralisent aussi au cas des fonctions vectorielles.

Théorème 5.3.34

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans F. On suppose que

i) Pour tout entier n, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

ii) La suite de fonctions (f_n) converge (simplement) vers une fonction f.

iii) La suite des fonctions dérivées (f_n') converge **uniformément** sur tout segment J de I vers une fonction g.

Alors la suite de fonction (f_n) converge uniformément sur tout segment J de I, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = g$. Dit autrement on a

$$\lim_{n\to\infty} f_n' = f' = \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)'.$$

Là encore, il existe un « version série ».

Théorème 5.3.35 (Dérivation termes à termes)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans F. On suppose que

i) Pour tout entier n, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,

ii) la série de fonctions converge (simplement) vers S sur I,

iii) la série de fonctions des dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment J vers T

Alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment J, la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ et $S' = T$. C'est-à-dire

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Remarque : On peut encore étendre ces théorèmes au cas des fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exemple :

6 Arcs paramétrés

6.1 Généralités

Définition 6.1.36

1. *On appelle arc paramétré de classe $\mathscr{C}^k$ à valeurs dans F tout application γ de classe $\mathscr{C}^k$ d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs dans F.*
2. *Soit γ un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^k$, on appelle support de l'arc l'ensemble image $\gamma(I)$*

Remarques :

1. Dans la plupart des exemples, F sera $\mathbf{R}^2$ (ou $\mathbf{R}^3$).
2. Le support de l'arc s'appelle aussi courbe paramétrée. C'est l'objet géométrique que l'on veut étudier la plupart du temps.
3. Il faut avoir une interprétation cinématique des courbes paramétrées. Précisément si γ est un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$, on pense au paramètre t comme le temps et $\gamma(t)$ est alors la position au temps t.

Exemples :

1. On peut considérer $\gamma_1 : t \mapsto (t, t^2)$.
2. On peut considérer $\gamma_2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

Définition 6.1.37

1. *Soit γ un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout $t_0 \in I$, appelle vecteur vitesse en t_0 le vecteur $\gamma'(t_0)$.*
2. *Soit γ un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$ et $t_0 \in I$. Si $\gamma'(t_0) = 0$ on dit que t_0 est un point stationnaire. A l'inverse, si $\gamma'(t_0) \neq 0$ le point est dit régulier.*
3. *Soit γ un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$. Il est dit régulier si tous ses points sont réguliers.*

ATTENTION

Le fait d'être régulier dépend du paramétrage et pas juste du support.
Par exemple si on veut paramétrer le cercle unité on peut prendre :

$$\gamma_2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

C'est un arc régulier, en effet, $\forall t \in \mathbf{R}, \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ et donc $||\gamma'(t)|| = 1$ donc t est régulier.
Mais si on considère

$$\gamma_3 : t \mapsto (\cos(t^2), \sin(t^2))$$

Le support est encore le cercle en entier mais cette fois

$$\gamma_3'(t) = (-2t\sin(t^2), 2t\cos(t^2))$$

En $t = 0$ on a un point stationnaire.

Définition 6.1.38

Si t_0 est un point régulier, le vecteur $T = \dfrac{1}{||\gamma'(t_0)||}\gamma'(t_0)$ s'appelle le vecteur tangent.
On a pour h au voisinage de 0,

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + h\gamma'(t_0) + o(h).$$

Remarque : Le vecteur tangent est unitaire.

Définition 6.1.39

Si on suppose que l'arc est de classe $\mathscr{C}^2$ et que t_0 est régulier, on appelle vecteur normal le vecteur $N = \dfrac{dT}{dt}$.

Remarque : Si F a une structure euclidienne et que la norme est la norme euclidienne alors N est normal à T à savoir $(N|T) = 0$. En effet, comme $T(t)$ est toujours un vecteur unitaire en dérivant $t \mapsto (T(t)|T(t))$ on obtient

$$0 = 2(N(t)|T(t)).$$

Exercice : Calculer $T(t)$ et $N(t)$ pour γ_1 et γ_2