Fonctions à valeurs vectorielles

Chapitre 14

Lycée Chateaubriand

Table des matières

Dans le chapitre 5 on a étudié les suites et séries de fonctions définies sur une partie X d'un espace vectoriel de dimension finie (souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et à valeurs dans un corps $\mathbb{K}$.

Nous allons étendre les résultats de ce chapitre au cas des fonctions à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension finie.

Dans ce paragraphe, les fonctions sont définie sur un ensemble X.

Définition 1 (Convergence des suites de fonctions)

Soit (f_n) une suite de fonction définie sur un ensemble X et à valeurs dans F. Soit $f : X \to F$.

1. *On dit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers f et on note $(f_n) \xrightarrow{CS} f$ si et seulement si, pour tout x de X la suite $(f_n(x))$ tend vers $f(x)$.*
2. *On dit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f et on note $(f_n) \xrightarrow{CU} f$ si et seulement si,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall x \in X,\ ||f_n(x) - f(x)|| \leq \varepsilon$$

   Cela revient à dire qu'à partir d'un certain rang, les fonctions $f_n - f$ sont bornées et $||f_n - f||_\infty \to 0$.

Remarque : Ces deux notions ne dépendent pas de la norme sur F car toutes les normes sont équivalentes sur F.

Définition 2 (Convergence des séries de fonctions)

Soit (f_k) une suite de fonction définie sur un ensemble X et à valeurs dans F. On considère la série de fonctions $\left(\sum_{k\geq 0} f_k\right)$

1. *On dit que la série de fonction $\left(\sum_{k\geq 0} f_k\right)$ converge simplement vers la fonction S si la suite des sommes partielles $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ converge simplement vers la fonction S.*
2. *On dit que la série de fonction $\left(\sum_{k\geq 0} f_k\right)$ converge uniformément vers la fonction S si la suite des sommes partielles $S_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ converge uniformément vers la fonction S.*
3. *On dit que la série de fonction $\left(\sum_{k\geq 0} f_k\right)$ converge normalement si les fonctions f_k sont bornées et que la série numérique à termes positifs $\left(\sum_{k\geq 0} ||f_k||_\infty\right)$ converge.*

Proposition 1

Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et que la suite des restes converge uniformément vers 0.

Exemple : Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & \dfrac{A^n}{n!} \end{array}$$

On considère alors la série de fonctions $\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)$.

On considère une norme $||.||$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on pose C tel que

$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, ||AB|| \leq C||A||.||B||.$$

On considère alors la série de fonctions $\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)$.

On considère une norme $||.||$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on pose C tel que

$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, ||AB|| \leq C||A||.||B||.$$

Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,

$$||f_n(A)|| = \frac{1}{n!}||A^n|| \leq \frac{C^{n-1}||A||^n}{n!}.$$

De ce fait, si X est une partie bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et si $K \in \mathbb{R}$ vérifie que $X \subset B(0_E, K)$, on a que

$$\forall A \in X, ||f_n(A)|| \leq \frac{C^{n-1}||A||^n}{n!} \leq \frac{C^{n-1}K^n}{n!} = \alpha_n.$$

C'est-à-dire :

$$||A \mapsto f_n(A)||_{\infty,X} \leq \alpha_n.$$

Maintenant la série $(\sum_{n\geq 0} \alpha_n)$ converge donc la série de fonctions $\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)$ converge normalement sur X.

Notons cependant qu'elle ne converge pas normalement sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ en entier puisque les fonctions f_n ne sont pas bornées sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 2

Soit $\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)$ une série de fonctions. Si elle converge normalement alors elle converge uniformément.

Démonstration : Pour montrer que la série converge uniformément, on va montrer qu'elle converge simplement et que la série des restes converge uniformément vers 0.

Attention

Il faut faire attention à ne pas confondre $||.||$ qui désigne la norme de l'espace vectoriel F avec $||.||_\infty$ qui désigne la norme infinie de l'espace vectoriel $\mathscr{F}(X, F)$.

- Soit $x \in X$, on a que pour tout entier n, $||f_n(x)|| \leq ||f_n||_\infty$.
  Par comparaison de série à termes positifs, on en déduit que la série $\left(\sum_{n\geq 0} ||f_n(x)||\right)$ converge car la série $\left(\sum_{n\geq 0} ||f_n||_\infty\right)$ converge.
  De ce fait, la série $\left(\sum_{n\geq 0} f_n(x)\right)$ est absolument convergente donc convergente car F est un espace vectoriel de dimension finie.
  La série de fonctions converge donc simplement.

- On considère alors le reste de la série. Pour tout $x \in X$:

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_n(x) \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} ||f_n(x)|| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} ||f_n||_\infty$$

On en déduit qu' en notant $x \mapsto R_n(x)$ le reste de la série de fonctions

$$||x \mapsto R_n(x)||_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} ||f_n||_\infty$$

On en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} ||R_n||_\infty = 0$$

De ce fait, la série des fonctions des restes tend uniformément vers 0.

En conclusion la série de fonctions $\left(\sum_{n \geq 0} f_n \right)$ converge uniformément. $\square$

Exemple : La série exponentielle converge uniformément sur toute partie bornée de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On suppose maintenant que X est une partie d'un espace vectoriel normé E. On note $||.||_E$ la norme de E.

Les théorèmes sur la continuité des suites et des séries de fonctions se généralisent directement.

Théorème 3 (Continuité de la limite d'une suite de fonctions)

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur X et à valeurs dans F qui converge (simplement) vers une fonction f.

1. Soit $x_0 \in X$. On suppose que

   i) Les fonctions f_n sont continues en x_0.
   ii) Il existe un voisinage de x_0 dans X tel que la suite de fonctions converge uniformément.

   Alors la fonction f est continue en x_0.

2. On suppose que

   i) Les fonctions f_n sont continues sur X
   ii) Pour tout x_0 de X, il existe un voisinage de x_0 dans X tel que la suite de fonctions converge uniformément .

   Alors f est continue sur X.

Théorème 4 (Continuité de la somme d'une série de fonctions)

Soit $\left(\sum_{n\geq 0} f_n\right)$ une suite de fonctions définies sur X et à valeurs dans F qui converge (simplement) vers une fonction S.

1. Soit $x_0 \in X$. On suppose que
   - *i)* Les fonctions f_n sont continues en x_0.
   - *ii)* Il existe un voisinage de x_0 dans X tel que la série de fonctions converge uniformément .

   Alors la fonction S est continue en x_0.
2. On suppose que
   - *i)* Les fonctions f_n sont continues sur X
   - *ii)* Pour tout x_0 de X, il existe un voisinage de x_0 dans X tel que la série de fonctions converge uniformément .

   Alors S est continue sur X.

Exemple : On reprend la série exponentielle de matrice.

Pour tout entier naturel k, $f_k : A \mapsto \dfrac{A^k}{k!}$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par continuité du produit matriciel.

De plus, pour tout $A_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La boule ouverte $B(0_E, ||A_0|| + 1)$ est un voisinage de A_0 qui est borné. De ce fait, la série de fonctions converge normalement donc uniformément sur cette boule.

On en déduit que $A \mapsto \exp(A)$ est une fonction continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple : On reprend la série exponentielle de matrice.

Pour tout entier naturel k, $f_k : A \mapsto \dfrac{A^k}{k!}$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par continuité du produit matriciel.

De plus, pour tout $A_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La boule ouverte $B(0_E, ||A_0|| + 1)$ est un voisinage de A_0 qui est borné. De ce fait, la série de fonctions converge normalement donc uniformément sur cette boule.

On en déduit que $A \mapsto \exp(A)$ est une fonction continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Attention

La série de fonctions **ne** converge **pas** uniformément sur tout $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice : Montrer $A \mapsto (I - A)^{-1}$ est continue sur un voisinage ouvert de 0_E.

Exercice : Montrer $A \mapsto (I - A)^{-1}$ est continue sur un voisinage ouvert de 0_E.

On considère encore un réel $C > 0$ tel que :

$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, ||AB|| \leq C||A||.||B||.$$

Exercice : Montrer $A \mapsto (I - A)^{-1}$ est continue sur un voisinage ouvert de 0_E.

On considère encore un réel $C > 0$ tel que :

$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, ||AB|| \leq C||A||.||B||.$$

On sait que si $||A|| < \frac{1}{C}$, la matrice $I - A$ est inversible et

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k$$

On pose donc pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & A^k \end{array}$$

de telle sorte que la fonction $A \mapsto (I - A)^{-1}$ que l'on considère sur $B(0_E, \frac{1}{C})$ (qui est un voisinage de 0_E) est la somme de la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} u_k$.

- On vérifie aisément que les fonctions u_k sont continues sur $B(0_E, \frac{1}{C})$.

- Il reste à établir la convergence normale de la série sur toute boule $\overline{B}(0_E, \alpha)$ avec $\alpha < \frac{1}{C}$. Pour cela on voit que

$$||u_k||_{\infty, \overline{B}(0_E,\, \alpha)} \leq C^{k-1}\alpha^k$$

et que la série $\sum\limits_{k \geq 0} C^{k-1}\alpha^k$ converge car $\alpha < C$.

On en déduit que $A \mapsto (I - A)^{-1}$ est continue.

On peut aussi généraliser le théorème de la double limite.

Théorème 5 (Théorème de la double limite)

Soit (f_n) une suite de fonctions de X dans F et $f \in \mathscr{F}(X, F)$. Soit a un point adhérent à X. On suppose que

i) La suite (f_n) converge **uniformément** vers f sur un voisinage de a dans X.

ii) pour tout n, f_n admet en a une limite $\ell_n \in F$.

Alors la suite (ℓ_n) admet une limite ℓ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$. C'est-à-dire

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right) = \ell = \lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right).$$

On peut aussi généraliser le théorème de la double limite.

Théorème 5 (Théorème de la double limite)

Soit (f_n) une suite de fonctions de X dans F et $f \in \mathscr{F}(X, F)$. Soit a un point adhérent à X. On suppose que

i) La suite (f_n) converge **uniformément** vers f sur un voisinage de a dans X.

ii) pour tout n, f_n admet en a une limite $\ell_n \in F$.

Alors la suite (ℓ_n) admet une limite ℓ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$. C'est-à-dire

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\lim_{x \to a} f_n(x) \right) = \ell = \lim_{x \to a} \left(\lim_{n \to +\infty} f_n(x) \right).$$

Remarque : La démonstration est la même que dans le cas étudié au chapitre 5. Il est important que l'espace d'arrivé soit de dimension finie. En effet, pour montrer que la suite (ℓ_n) a une limite finie, on utilise que c'est une suite bornée et on en extrait alors une sous-suite convergente d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. On peut généraliser cela en utilisant qu'une boule fermée bornée **en dimension finie** est compacte.

Théorème 6 (Double limite pour les séries de fonctions)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur X et a un point adhérent à A. On suppose que

i) La série de fonctions converge uniformément vers S au voisinage de a

ii) pour tout n, f_n admet en a une limite $\ell_n \in F$.

Alors la série $\sum \ell_n$ converge (vers ℓ) et $\lim\limits_{x \longrightarrow a} S(x) = \ell$. C'est-à-dire :

$$\lim_{x \longrightarrow a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{x \longrightarrow a} f_n(x) \right).$$

Nous allons maintenant généraliser l'intégration et la dérivation des suites et séries de fonctions dans le cas des fonctions à valeurs vectorielles.

Théorème 7

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans F. Soit f une fonction définie sur I et à valeurs dans F. On suppose que

i) Les fonctions f_n sont continues.

ii) La suite de fonctions converge uniformément sur tout segment J inclus dans I.

Soit $a \in I$, on pose $H_n : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f_n(t)dt$ et $H : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$. La suite (H_n) converge uniformément vers H sur tout segment J de I.

Démonstration : Il suffit de le démontrer coordonnées par coordonnées sur une base de F. □

Il existe une « version série ».

Théorème 8 (Intégration des séries de fonctions)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans F. On suppose que

i) Pour tout entier n, f_n est continue

ii) La série de fonctions converge uniformément sur tout segment J vers S

Pour tout a de I on pose $H_n : x \mapsto \int_a^x f_n$ la primitive de f_n qui s'annule en a. Alors la série $\sum H_n$ converge uniformément sur tout segment J de I vers $x \mapsto \int_a^x S$. C'est-à-dire,

$$\forall x \in I, \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x f_n = \int_a^x \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

Remarque : En particulier si $I = [a, b]$ on obtient $\lim_{n \to \infty} \left(\int_a^b f_n \right) = \int_a^b f$ dans le premier cas et $\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$ dans le deuxième cas.

Les théorèmes sur la dérivation se généralisent aussi au cas des fonctions vectorielles.

Théorème 9

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans F. On suppose que

i) Pour tout entier n, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

ii) La suite de fonctions (f_n) converge (simplement) vers une fonction f.

iii) La suite des fonctions dérivées $({f_n}')$ converge **uniformément** sur tout segment J de I vers une fonction g.

Alors la suite de fonction (f_n) converge uniformément sur tout segment J de I, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f' = g$. Dit autrement on a

$$\lim_{n \to \infty} {f_n}' = f' = \left(\lim_{n \to \infty} f_n\right)'.$$

Là encore, il existe un « version série ».

Théorème 10 (Dérivation termes à termes)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans F. On suppose que

i) Pour tout entier n, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I,

ii) la série de fonctions converge (simplement) vers S sur I,

iii) la série de fonctions des dérivées $\sum f_n{}'$ converge uniformément sur tout segment J vers T

Alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment J, la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ et $S' = T$. C'est-à-dire

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n{}'.$$

Remarque : On peut encore étendre ces théorèmes au cas des fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exemple : Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose pour tout entier k,

$$f_k : t \mapsto \frac{(tA)^k}{k!}$$

A t fixé, on sait que la série converge. La série de fonctions $\sum_{k\geq 0}\left(t \mapsto \frac{(tA)^k}{k!}\right)$ converge donc vers

$$S : t \mapsto \exp(tA).$$

Montrons que S est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculons S'.

- La série de fonctions $\sum_{k\geq 0}\left(t \mapsto \frac{(tA)^k}{k!}\right)$ converge simplement vers S sur $\mathbb{R}$.

- La série de fonctions $\sum_{k\geq 0} \left(t \mapsto \frac{(tA)^k}{k!} \right)$ converge simplement vers S sur $\mathbb{R}$.
- À k fixé, f_k est de classe $\mathscr{C}^1$ et $f_k' : t \mapsto \frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!}$ si $k \geq 1$ et $f_0' : t \mapsto 0$.

- La série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \left(t \mapsto \dfrac{(tA)^k}{k!} \right)$ converge simplement vers S sur $\mathbb{R}$.
- À k fixé, f_k est de classe $\mathscr{C}^1$ et $f_k{}' : t \mapsto \dfrac{t^{k-1} A^k}{(k-1)!}$ si $k \geq 1$ et $f_0{}' : t \mapsto 0$.
- Soit J un segment de $\mathbb{R}$, montrons que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} f_k{}'$ converge uniformément car normalement sur J.

Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $J \subset [-M, M]$. On en déduit que

$$||t \mapsto f_k{}'(t)||_{\infty,J} \leq \frac{M^{k-1}}{(k-1)!}||A^k|| \leq \frac{(CM)^{k-1}||A||^k}{(k-1)!}$$

en notant C tel que

$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2, ||AB|| \ \leq C||A||||B||.$$

La série numérique $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(CM)^{k-1}||A||^k}{(k-1)!}$ converge.

On en déduit donc que la série de fonctions $\displaystyle\left(\sum_{k\geq 0} f_k{}'\right)$ converge normalement sur J donc uniformément. De ce fait, la fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, S'(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!}$$

Finalement,

$$S'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} A\frac{t^k A^k}{k!} = A\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = AS(t)$$

où la deuxième égalité vient de la continuité du produit matriciel.

Définition 3

1. *On appelle arc paramétré de classe $\mathscr{C}^k$ à valeurs dans F tout application γ de classe $\mathscr{C}^k$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F.*
2. *Soit γ un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^k$, on appelle support de l'arc l'ensemble image $\gamma(I)$*

Remarque :

- Dans la plupart des exemples, F sera $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$).
- Le support de l'arc s'appelle aussi courbe paramétrée. C'est l'objet géométrique que l'on veut étudier la plupart du temps.
- Il faut avoir une interprétation cinématique des courbes paramétrées. Précisément si γ est un arc paramétré de classe $\mathscr{C}^1$, on pense au paramètre t comme le temps et $\gamma(t)$ est alors la position au temps t.

Exemple :

- On peut considérer $\gamma_1 : t \mapsto (t, t^2)$.

Exemple :

- On peut considérer $\gamma_1 : t \mapsto (t, t^2)$.
- On peut considérer $\gamma_2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

Définition 4

1. *Soit* γ *un arc paramétré de classe* $\mathscr{C}^1$. *Pour tout* $t_0 \in I$, *appelle vecteur vitesse en* t_0 *le vecteur* $\gamma'(t_0)$.
2. *Soit* γ *un arc paramétré de classe* $\mathscr{C}^1$ *et* $t_0 \in I$. *Si* $\gamma'(t_0) = 0$ *on dit que* t_0 *est un point* ***stationnaire***. *A l'inverse, si* $\gamma'(t_0) \neq 0$ *le point est dit* ***régulier***.
3. *Soit* γ *un arc paramétré de classe* $\mathscr{C}^1$. *Il est dit* ***régulier*** *si tous ses points sont réguliers.*

Attention

Le fait d'être régulier dépend du paramétrage et pas juste du support.
Par exemple si on veut paramétrer le cercle unité on peut prendre :

$$\gamma_2 : t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

C'est un arc régulier, en effet, $\forall t \in \mathbb{R}, \gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ et donc $||\gamma'(t)|| = 1$ ce qui implique que t est régulier.

Mais si on considère

$$\gamma_3 : t \mapsto (\cos(t^2), \sin(t^2))$$

Le support est encore le cercle en entier mais cette fois

$$\gamma_3'(t) = (-2t\sin(t^2), 2t\cos(t^2))$$

En $t = 0$ on a un point stationnaire.

Définition 5

Si t_0 est un point régulier, le vecteur $T = \frac{1}{||\gamma'(t_0)||}\gamma'(t_0)$ s'appelle le vecteur tangent.
On a pour h au voisinage de 0,

$$\gamma(t_0 + h) = \gamma(t_0) + h\gamma'(t_0) + o(h).$$

Remarque : Le vecteur tangent est unitaire.

Définition 6

Si on suppose que l'arc est de classe $\mathscr{C}^2$ et que t_0 est régulier, on appelle vecteur normal le vecteur $N = \frac{dT}{dt}$.

Remarque : Si F a une structure euclidienne et que la norme est la norme euclidienne alors N est normal à T à savoir $(N|T) = 0$. En effet, comme $T(t)$ est toujours un vecteur unitaire en dérivant $t \mapsto (T(t)|T(t))$ on obtient

$$0 = 2(N(t)|T(t)).$$