Fonctions à valeurs vectorielles

Chapitre 14

Lycée Chateaubriand

Table des matières

Notations

Dans tout ce chapitre I désignera un intervalle (non trivial) de $\mathbb{R}$ et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie (notée p). On note $||.||$ la norme.

Nous allons définir la dérivabilité et l'intégration pour les fonctions de I dans F.

Définition 1

Soit f une fonction de I dans F et $t_0 \in I$. On dit que f est dérivable en t_0 si la fonction

$$\begin{array}{cccc} \varphi_{t_0} : & I \setminus \{x_0\} & \to & F \\ & t & \mapsto & \dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \end{array}$$

a un limite en t_0.
Dans ce cas, la fonction f est dite dérivable en t_0, la limite s'appelle dérivée de f en t_0 et on note

$$f'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Remarques

- L'élément $f'(t_0)$ est un élément de F.
- Dans le cas où $F = \mathbb{R}^2$ ou $F = \mathbb{R}^3$, une application $f : t \to F$ peut être imaginée comme le déplacement d'un point dans F en fonction du paramètre t (en voyant F comme un espace affine et plus un espace vectoriel). Dans ce cas, $f'(t_0)$ s'appelle le vecteur vitesse.

Proposition 1 (Expression en coordonnées)

Avec les mêmes notations. Si on note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F, on pose pour tout $i \in [\![1, p]\!]$,

$$f_i = e_i^* \circ f : I \to \mathbb{K}$$

(c'est-à-dire que pour tout t dans I, $f(t) = \sum_{i=1}^{p} f_i(t) e_i$)

1. La fonction f est dérivable en t_0 si et seulement si toutes les f_i sont dérivables en t_0.
2. Dans ce cas, $f'(t_0) = \sum_{i=1}^{p} f_i'(t_0) e_i$

Démonstration : Ce n'est qu'un cas particulier du théorème analogue sur les limites. $\square$

Exemple : On considère l'espace vectoriel $F = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B}$ la base canonique. Pour savoir si une application est dérivable, on peut regarder coordonnée par coordonnée. Par exemple si on étudie

$$f : t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Chaque application coordonnée est dérivable en $t_0 \in \mathbb{R}$ donc f est dérivable en t_0 et

$$f'(t_0) = \begin{pmatrix} -\sin t_0 & -\cos t_0 \\ \cos t_0 & -\sin t_0 \end{pmatrix} = f\left(t_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Nous allons donner une définition « à la Taylor-Young » de la dérivabilité, il faut au préalable donner un sens à $o(h)$.

Définition 2

On note, pour tout entier k, $\underset{h\to 0}{o}(h^k)$ *une fonction définie d'un voisinage de* 0 *dans F de la forme* $h \mapsto h^k\varepsilon(h)$ *où* ε *tend vers* 0 *quand* h *tend vers* 0*.*

Remarque : On peut de même définir $\underset{t\to t_0}{o}((t-t_0)^k)$. La plupart du temps, on omettra de préciser au voisinage de quel point on travaille en indice.

Proposition 2 (Interprétation à la Taylor-Young)

Avec les notations précédentes, f est dérivable en t_0 si et seulement s'il existe $\alpha \in F$ tel que

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + h\alpha + \underset{0}{o}(h).$$

Dans ce cas, $f'(t_0) = \alpha$.

Démonstration : La démonstration est analogue au cas réel.

$$\begin{aligned}
\exists \alpha \in E, f(t_0 + h) = f(t_0) + h\alpha + \underset{0}{o}(h) \quad & \Longleftrightarrow \quad \exists \alpha \in E, \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \alpha + \underset{0}{o}(1) \\
& \Longleftrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \alpha
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple : En reprenant notre exemple ci-dessus,

$$\begin{aligned}
f(t_0+h) &= \begin{pmatrix} \cos(t_0+h) & -\sin(t_0+h) \\ \sin(t_0+h) & \cos(t_0+h) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos t_0 - h\sin t_0 + o(h) & -\sin t_0 - h\cos t_0 + o(h) \\ \sin t_0 + h\cos t_0 + o(h) & \cos t_0 - h\sin t_0 + o(h) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos t_0 & -\sin t_0 \\ \sin t_0 & \cos t_0 \end{pmatrix} + h\begin{pmatrix} -\sin t_0 & -\cos t_0 \\ \cos t_0 & -\sin t_0 \end{pmatrix} + o(h)
\end{aligned}$$

Définition 3 (Dérivabilité à droite et à gauche)

Avec les mêmes notations

1. *Si t_0 n'est pas la borne inférieure de I, f est dite dérivable à gauche en t_0 si φ_{t_0} a une limite quand $t \to t_0^-$. La dérivée à gauche est notée $f'_g(t_0)$.*
2. *Si t_0 n'est pas la borne supérieure de I, f est dite dérivable à droite en t_0 si φ_{t_0} a une limite quand $t \to t_0^+$. La dérivée à droite est notée $f'_d(t_0)$.*

Définition 4

Soit f une fonction de I dans F.

1. *Elle est dite dérivable si elle est dérivable en tout point t_0 de I. On note alors f' sa fonction dérivée définie sur I par :*

$$f' : t \mapsto f'(t).$$

2. *Elle est dite de classe $\mathscr{C}^1$ si elle est dérivable et que sa fonction dérivée est continue.*

Proposition 3

Une combinaison linéaire de fonction dérivables est dérivable. L'ensemble des fonctions dérivables est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions.

Démonstration : Il suffit de recopier la preuve usuelle.

Proposition 4

Soit G un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit f une fonction de I dans F et $L : F \to G$ une application linéaire.

1. Si f est dérivable en t_0 alors $L \circ f$ est dérivable en t_0 et
$$(L \circ f)'(t_0) = L(f'(t_0))$$
2. Si f est dérivable alors $L \circ f$ est dérivable et
$$(L \circ f)' = L \circ f'$$

Démonstration :

1. On étudie
$$\frac{L(f(t_0+h))-L(f(t_0))}{h}=L\left(\frac{F(t_0+h)-F(t_0)}{h}\right)\xrightarrow[h\to 0]{}L(f'(t_0))$$
car L est continue (application linéaire entre deux espaces vectoriels normés de dimension finie). On en déduit bien que $L\circ f)$ est dérivable en t_0 et que $(L\circ f)'(t_0)=L(f'(t_0))$.
2. Il suffit d'appliquer 1. en tout t_0 de I.

$\square$

Remarque : Ce résultat sera généralisée dans le chapitre sur le calcul différentiel (chain rule)

Exemple : On reprend notre application $f : I \to F = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$f : t \mapsto f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Pour tout matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, on peut regarder

$$L : \begin{array}{ccc} F & \to & F \\ M & \mapsto & AM \end{array}$$

Elle est linéaire ; on en déduit que

$$L \circ f : t \mapsto Af(t)$$

est dérivable et de dérivée : $t \mapsto Af'(t)$.

Proposition 5

Soit G, H des espaces vectoriels normés de dimension finie. Soit f et g des fonctions de I dans F et de I dans G. Soit $B : F \times G \to H$ une application bilinéaire.

1. Si f et g sont dérivables en t_0 alors $t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable en t_0 et
$$(B(f,g))'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0)).$$
2. Si f et g sont dérivables alors $t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable et
$$(B(f,g))' = B(f', g) + B(f, g').$$

Démonstration : La preuve est semblable à la preuve de la dérivabilité d'un produit. Précisément, pour tout h proche de 0

$$B(f(t_0+h),(g(t_0+h)) = B(f(t_0)+hf'(t_0)+h\varepsilon_1(h), g(t_0)+hg'(t_0)+h\varepsilon_2(h))$$

où ε_1 et ε_2 tendent vers 0 quand $h \to 0$. On a donc, par bilinéarité :

$$B(f(t_0+h), g(t_0+h)) = B(f(t_0), g(t_0)) + h\left[B(f(t_0), g'(t_0)) + B(f'(t_0), g(t_0))\right] + h\alpha(h)$$

où

$$\alpha(h) = B(f(t_0), \varepsilon_2(h)) + hB(f'(t_0), g'(t_0)) + hB(f'(t_0), \varepsilon_2(h)) + hB(\varepsilon_1(h), g'(t_0)) + hB(\varepsilon_1(h)$$

Comme B est bilinéaire et que F, G sont de dimension finie, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in F \times G, ||B(x,y)||_H \leq C||x||_F.||y||_G.$$

Montrons que les 6 termes de α tendent vers 0 quand h tend vers 0.

- $||B(f(t_0), \varepsilon_2(h))||_H \leq C||f(t_0)||_F.||\varepsilon_2(h)||_G \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$ car $\varepsilon_2(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.
- $||hB(f'(t_0), g'(t_0))||_H \leq |h|.||B(f'(t_0), g'(t_0))||_H \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$
- les autres termes se traitent de manière similaire.

On en déduit que $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$, c'est-à-dire que

$B(f(t_0+h), (g(t_0+h)) = B(f(t_0), g(t_0)) + h\left[B(f(t_0), g'(t_0)) + B(f'(t_0), g(t_0))\right] + o(h)$

ce qui signifie que $B(f, g)$ est dérivable en t_0 et que

$$(B(f, g))'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0)).$$

$\square$

Remarque : On peut étendre cela aux applications multilinéaires. Par exemple si F est de dimension n et $f_1, \dots, f_n$ sont des applications dérivables de I dans F, $\Phi : t \mapsto \det(f_1(t), \dots f_n(t))$ est dérivable et

$$\Phi'(t) = \sum_{p=1}^{n} \det(f_1(t), \dots, f_{p-1}(t), f'_p(t), f_{p+1}(t), \dots, f_n(t))$$

Cela se démontre en reprenant la preuve du cas bilinéaire.

Exemple :

1. Soit $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto B(t)$ deux applications dérivables de I dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $\varphi : t \mapsto A(t)B(t)$ est dérivable et

Exemple :

1. Soit $t \mapsto A(t)$ et $t \mapsto B(t)$ deux applications dérivables de I dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $\varphi : t \mapsto A(t)B(t)$ est dérivable et

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

Exemple :

2. Dans le cas où F est un espace euclidien, on peut regarder le produit scalaire

$$(u, v) \mapsto (u|v)$$

qui est bilinéaire.
On en déduit que si f et g sont deux fonctions dérivables, la fonction $\phi : t \mapsto (f(t) \mid g(t))$ est dérivable et

Exemple :

2. Dans le cas où F est un espace euclidien, on peut regarder le produit scalaire

$$(u, v) \mapsto (u|v)$$

qui est bilinéaire.
On en déduit que si f et g sont deux fonctions dérivables, la fonction $\phi : t \mapsto (f(t) \mid g(t))$ est dérivable et

$$\phi'(t) = (f'|g) + (f|g').$$

Dans le cas où $f = g$ on obtient donc

$$(||f||^2)' = 2(f'|f).$$

En particulier si $||f||$ est constante, on obtient que f et f' sont orthogonaux.

Exercice : Pour tout n on pose

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{x^2}{2!} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \frac{x^3}{6!} & \frac{x^2}{2!} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ \frac{x^n}{n!} & \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \cdots & \frac{x^2}{2!} & x \end{vmatrix}$$

Calculer $D_n(x)$. On pourra commencer par calculer sa dérivée.

Proposition 6

Soit f une fonction de I dans F. Soit φ une fonction de J dans I où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Soit $x_0 \in J$, on pose $t_0 = \varphi(x_0)$. Si φ est dérivable en x_0 et f est dérivable en t_0 alors $f \circ \varphi$ est dérivable en x_0 et
$$(f \circ \varphi)'(x_0) = \varphi'(x_0) f'(\varphi(x_0))$$
2. Si f et φ sont dérivables alors $f \circ \varphi$ aussi et
$$(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f \circ \varphi).$$

Démonstration : On recopie la preuve usuelle. Pour h proche de 0

$$\begin{aligned}
f(\varphi(x_0+h)) &= f\big(\varphi(x_0) + h\varphi'(x_0) + h\varepsilon_1(h)\big) \\
&= f(\varphi(x_0)) + (h\varphi'(x_0) + h\varepsilon_1(h)) f'(\varphi(x_0)) \\
&\quad + (h\varphi'(x_0) + h\varepsilon_1(h))\varepsilon_2(h\varphi'(x_0) + h\varepsilon_1(h)) \\
&= f(\varphi(x_0)) + h\varphi'(x_0) f'(\varphi(x_0)) + h\alpha(h)
\end{aligned}$$

où $\alpha(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. □

Définition 5

Soit f une fonction de I dans F. On définit le fait que f soit de classe $\mathscr{C}^n$ par récurrence :

- *On dit que f est de classe $\mathscr{C}^0$ si f est continue.*
- *Pour tout $n \geq 1$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ si f est dérivable et que f' est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$.*

On dit alors que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$, si pour tout entier n elle est de classe $\mathscr{C}^n$.
On note $\mathscr{C}^n(I, F)$ et $\mathscr{C}^\infty(I, F)$ l'ensemble des fonctions de classes $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) de I dans F.

Notation : Soit f de classe $\mathscr{C}^n$, on pose

$$f^{(0)} = f; f^{(1)} = f' \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!] f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$$

Proposition 7

On reprend les notations précédentes.

1. Soit $(f, g) \in \mathscr{C}^n(I, F)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}$, $\lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^n(I, F)$ et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$. En particulier, $\mathscr{C}^n(I, F)$ et $\mathscr{C}^\infty(I, F)$ sont des espaces vectoriels.
2. Soit $f \in \mathscr{C}^n(I, F)$ et $L \in \mathscr{L}(F, G)$, $L \circ f \in \mathscr{C}^n(I, G)$ et $(L \circ f)^{(n)} = L \circ f^{(n)}$
3. Soit B une application bilinéaire de F dans F, $(f, g) \in \mathscr{C}^n(I, F)$ alors $B(f, g) \in \mathscr{C}^n(I, G)$ et

$$(B(f, g))^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} B(f^{(p)}, g^{(n-p)}) \quad \text{(Formule de Leibniz)}$$

On s'intéresse maintenant à l'intégration. On se contente de l'intégration des fonctions continues par morceaux sur **un segment.** On notera donc $I = [a, b]$

Définition 6 (Fonctions continues par morceaux)

Une fonction f de I dans F est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b)$ telle que

1. *Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f_{]t_{i-1}, t_i[}$ est continue*
2. *La fonction f à des limites à gauches en tout les t_i (pour $i \in [\![0, n-1]\!]$) et à droite en tout les t_i (pour $i \in [\![1, n]\!]$).*

Remarque :

- Soit f une fonction continue par morceaux de I dans F. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F. Les fonctions $e_i^* \circ f$ sont continues par morceaux sur I.
- On notera $\mathscr{CM}(I, F)$ l'espace vectoriel des fonctions continues par morceaux.

Proposition - Définition 7

Soit f une fonction continue par morceaux de I dans F.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F,

$$\sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b e_i^* \circ f \right) e_i$$

ne dépend pas du choix de la base. On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ et on note ce terme $\displaystyle\int_a^b f$.

Remarque : Cela correspond à ce qui a été fait pour définir l'intégrale d'une fonction complexe en posant

$$\int_a^b f = \left(\int_a^b \mathrm{Re}(f) \right) + i \left(\int_a^b \mathrm{Im}(f) \right).$$

Démonstration : Fixons les notations.

On se donne $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_p)$ deux bases de F.

Soit P la matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et $Q = P^{-1}$.

On note (α_{ij}) les coefficients de Q.

Maintenant, on note $f_i = e_i^* \circ f$ et $g_i = (e'_i)^* \circ f$.

On considère pour tout $t \in I$, $X(t) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f(t)) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ et

$Y(t) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(t)) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$.

Les formules de changement de base donnent que pour tout $t \in I$,
$Y(t) = P^{-1}X(t) = QX(t)$. C'est-à-dire que pour tout t dans I et tout i dans $[\![1, p]\!]$

$$g_i(t) = \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} f_j(t)$$

En intégrant on obtient

$$\int_a^b g_i = \int_a^b \sum_{j=1}^{p} \alpha_{ij} f_j = \sum_{j=1}^{p} \int_a^b \alpha_{ij} f_j.$$

En faisant la somme on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \left(\int_a^b g_i \right) e'_i &= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{p} \int_a^b \alpha_{ij} f_j \right) e'_i \\
&= \sum_{j=1}^{p} \left[\left(\int_a^b f_j \right) \sum_{i=1}^{p} \alpha_{ij} e'_i \right] \\
&= \sum_{j=1}^{p} \left(\int_a^b f_j \right) e_j
\end{aligned}$$

□

Notation : On notera

$$\int_{[a,b]} f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(t)\,dt.$$

Théorème 8 (Propriétés)

1. L'intégrale $\int_a^b$ est une application linéaire de l'espace vectoriel $\mathscr{CM}(I, F)$ dans F.
2. Soit $c \in [a, b]$ et $f \in \mathscr{CM}(I, F)$,
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad \text{(Relation de Chasles)}$$
3. Soit $f \in \mathscr{CM}(I, F)$, $||f|| \in \mathscr{CM}(I, \mathbb{R})$ et
$$\left|\left|\int_a^b f\right|\right| \leq \int_a^b ||f|| \quad \text{(Inégalité triangulaire)}$$
4. Soit $f \in \mathscr{CM}(I, F)$, $||f|| \in \mathscr{CM}(I, \mathbb{R})$ et
$$\left|\left|\int_a^b f\right|\right| \leq (b-a) \sup_{t \in [a,b]} ||f(t)|| \quad \text{(Formule de la moyenne)}$$

1. On considère une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$. Soit $(f, g) \in \mathscr{C}\mathscr{M}(I, F)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, il suffit de voir que coordonnées par coordonnées, on a
$$\int_a^b e_i^*(\lambda f + g) = \int_a^b \lambda e_i^*(f) + e_i^*(g) = \lambda \int_a^b e_i^*(f) + \int_a^b e_i^*(g).$$
2. Là encore, il suffit de décomposer dans une base et de revenir à la propriété analogue pour l'intégrale des fonctions scalaires.

3. On fait comme ci-dessus en décomposant dans une base. En effet si on pose encore $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ et $f_i = e_i^* \circ f$. On a

$$\begin{aligned}
\left|\left|\int_a^b f\right|\right| &= \left|\left|\int_a^b \sum_i f_i e_i\right|\right| \\
&= \left|\left|\sum_i \left(\int_a^b f_i\right) e_i\right|\right| \\
&\leq \sum_i \left|\int_a^b f_i\right| \, ||e_i|| \\
&\leq \sum_i \int_a^b |f_i| ||e_i|| = \int_a^b \sum_i |f_i| ||e_i||
\end{aligned}$$

3. On fait comme ci-dessus en décomposant dans une base. En effet si on pose encore $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et $f_i = e_i^* \circ f$. On a

$$\begin{aligned}
\left|\left|\int_a^b f\right|\right| &= \left|\left|\int_a^b \sum_i f_i e_i\right|\right| \\
&= \left|\left|\sum_i \left(\int_a^b f_i\right) e_i\right|\right| \\
&\leq \sum_i \left|\int_a^b f_i\right| ||e_i|| \\
&\leq \sum_i \int_a^b |f_i|||e_i|| = \int_a^b \sum_i |f_i|||e_i||
\end{aligned}$$

Mais $\sum_i |f_i|||e_i|| \neq ||f||$ et l'inégalité n'est pas dans le bon sens.

Cette propriété ne se démontre pas comme toutes les autres en décomposant dans une base.

La preuve sera établie après les sommes de Riemann.

Définition 8 (Sommes de Riemann)

Soit $f : I \to F$ *et* $\sigma = (t_0 = a < t_1 < \cdots < t_n = b)$ *une subdivision de* I*. On se donne un élément* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \prod_{i=1}^{n} [t_{i-1}, t_i]$*. On appelle somme de Riemann associée à* f*,* σ *et* α *et on note* $R(f, \sigma, \alpha)$*,*

$$R(f, \sigma, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) f(\alpha_i) \in F.$$

Remarque : Dans le cadre du programme, on ne considère que des subdivisions à pas réguliers avec α_i pris « à gauche ». C'est-à-dire, σ définie par $t_i = a + i\dfrac{b-a}{n}$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i = t_{i-1}$.

C'est-à-dire

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

Théorème 9

Soit $f \in \mathscr{C}^0(I, F)$,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f) = \int_a^b f$$

Démonstration : Il suffit de décomposer dans une base. Précisément, soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base. On voit que pour tout entier n,

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{p} f_i\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) e_i = \sum_{i=1}^{p} R_n(f_i)e_i$$

Dans le cours de première année, on a vu le résultat analogue pour les fonctions à valeurs réelles, c'est-à- dire que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f_i) = \int_a^b f_i$$

Cela implique que

$$\lim_{n\to\infty} R_n(f) = \sum_{i=1}^{p}\left(\int_a^b f_i\right) e_i = \int_a^b f$$

Démonstration de l'inégalité triangulaire :

On peut maintenant démontrer l'inégalité triangulaire (et on obtiendra la formule de la moyenne comme corollaire).

Avec les notations précédentes, on sait que

$$R_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f$$

et que

$$R_n(||f||) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b ||f||$$

Il suffit alors de remarquer que

$$||R_n(f)|| = \left|\left|\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)\right|\right| \leq \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} ||f||\left(a+i\frac{b-a}{n}\right) = R_n(||f||).$$

En passant à la limite on a bien,

$$\left|\left|\int_a^b f\right|\right| \leq \int_a^b ||f||.$$

$\square$

Théorème 10 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit I un intervalle (non nécessairement un segment) et f une fonction de I dans F et $a \in I$. Si f est continue, la fonction $H : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ définie sur I est de classe $\mathscr{C}^1$. De plus, $H' = f$, de ce fait, H est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration : Il suffit, via une base de F, de revenir à la démonstration classique dans le cas des fonctions scalaires.

$\square$

Remarque : Avec les mêmes hypothèses, $x \mapsto \displaystyle\int_x^a f(t)dt$ est une primitive de $-f$.

Corollaire 11

Soit f une fonction continue sur I et H une primitive de f sur I,

$$\int_a^b f = [H]_a^b$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser que H étant une primitive de f, il existe une constante C telle que

$$\forall x \in I, H(x) = \int_a^x f(t)dt + C.$$

On en déduit que

$$H(b) - H(a) = \int_a^b f(t)dt + C - \int_a^a f(t)dt - C = \int_a^b f(t)dt.$$

□

Attention

Le lemme de Rolle ou le théorème des accroissements finis ne sont plus vraie quand $F \neq \mathbb{R}$. En effet on peut « tourner » autour d'un éventuel zéro. Par exemple

$$f : t \mapsto e^{it}$$

s'annule en 0 et en 2π, pourtant, $\forall t \in [0, 2\pi], f'(t) = ie^{it} \neq 0$.

Proposition 12 (Inégalités des accroissements finis)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans F. Soit $a, b \in I$ avec $a \leq b$.

$$\forall (a, b) \in I^2, ||f(b) - f(a)|| \leq |b - a| \sup_{t \in [a,b]} ||f'(t)||$$

Remarque : La borne supérieure existe (c'est même un maximum) car la fonction f' est continue sur le segment $[a, b]$

Démonstration : Avec les notations de l'énoncé,

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt.$$

Par inégalité triangulaire,

$$||f(b) - f(a)|| \leq \int_a^b ||f'(t)||dt$$

On peut alors utiliser l'inégalité de la moyenne

$$||f(b) - f(a)|| \leq \int_a^b ||f'(t)||dt \leq |b-a| \sup_{t \in [a,b]} ||f'(t)||.$$

$\square$

Proposition 13

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ de I vers F. Pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} + R_n \quad \text{où} \quad R_n = \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Démonstration : Il suffit, via une base de F, de revenir à la démonstration classique dans le cas des fonctions scalaires.

Remarque :

- Dans le cas $n = 0$, on retrouve le théorème fondamental de l'analyse : $f(b) = f(a) + \int_a^b f(t)dt$.
- En posant $b = a + h \iff h = b - a$ on obtient

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)h^k}{k!} + R_n$$

où

$$R_n = \int_a^b \frac{(a+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt = \int_a^b \frac{(h-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+u)dt$$

en posant $t = a + u$ dans l'intégrale.

Proposition 14 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ de I vers F. Pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$\left\| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)(b-a)^k}{k!} \right\| = ||R_n|| \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,b]} ||f^{(n+1)}||.$$

Remarque : La fonction $f^{(n+1)}$ est continue. Elle est donc bien bornée sur le segment $[a, b]$.

Démonstration : On utilise l'inégalité triangulaire puis l'inégalité de la moyenne

$$\left\| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right\| \leq \int_a^b \left\| \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \right\| dt \leq \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,b]} ||f^{(n+1)}||.$$

$\square$

Théorème 15 (Formule de Taylor-Young)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ de I dans F. Pour tout $a \in I$,

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \underset{x \to a}{o}((x-a)^n)$$

en posant $h = x - a$,

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \underset{h \to 0}{o}(h^n)$$

Démonstration : On revient encore au cas scalaire. En effet soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on pose $f_i = e_i^* \circ f$ de fait que

$$f : x \mapsto \sum_{i=1}^{p} f_i(x) e_i$$

On peut appliquer la formule de Taylor-Young à chaque f_i qui est de classe $\mathscr{C}^n$.

$$\forall x \in I, f_i(x) = f_i(a) + (x-a) f_i'(a) + \cdots + (x-a)^n \frac{f_i^{(n)}(a)}{n!} + (x-a)^n \varepsilon_i(x)$$

où $\varepsilon_i(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit que

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \cdots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + (x-a)^n \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i(x) e_i.$$

Maintenant, en posant $\varepsilon : x \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i(x) e_i$ qui tend vers 0 quand x tend vers a, on a bien,

$$\forall x \in I, f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \cdots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + (x-a)^n \varepsilon(x).$$

$\square$