

Partie I - Questions préliminaires

1) La fonction $x \mapsto \ln x$ est une fonction concave sur \mathbb{R}_+^* . D'après l'inégalité de Jensen pour $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$:

$$\ln \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} a_i \right) \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln(a_i)$$

En prenant l'exponentielle,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \geq \exp \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln(a_i) \right) = \prod_{i=1}^n \exp \left(\frac{1}{n} \ln(a_i) \right) = \prod_{i=1}^n a_i^{\frac{1}{n}} = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}}.$$

2) a) Soit $s \in \mathcal{S}(E)$. Selon le théorème spectral, il existe une base orthonormée de E constituée de vecteurs propres de s : s est diagonalisable en base orthonormée.

Traduction matricielle : si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice P orthogonale et une matrice D diagonale telles que $S = PDP^{-1} = PDP^T$.

b) On considère la matrice S de l'énoncé. On calcule son polynôme caractéristique : $\chi_S(X) = X^2 - \text{Tr}(S)X + \det(S) = X^2$, donc $\text{Sp}(S) = \{0\}$. De ce fait, si S était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc elle serait nulle, ce qui est faux.

Ainsi S est symétrique à coefficients complexes sans être diagonalisable.

3) — Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Si on note $A = (a_{ij})$ la matrice de s dans la base \mathcal{B} alors comme, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ $s(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$ on obtient que

$$a_{ij} = \langle s(e_j) | e_i \rangle.$$

On en déduit que s est symétrique si et seulement si sa matrice est symétrique dans toute base orthonormée.

— Si \mathcal{B} est une base orthonormée, on note S la matrice de s dans la base \mathcal{B} . Pour tout vecteur x de E , si on note X la matrice des coordonnées de x dans la base \mathcal{B} alors

$$\langle s(x) | x \rangle = (SX)^T X = X^T S^T X = X^T S X$$

car S est symétrique. On en déduit que s est symétrique positif (resp. symétrique défini positif) si et seulement si S l'est.

4) a) Notons $x = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i$. Alors $s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \varepsilon_i$. Or la base β est orthonormée, donc $R_s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$.

b) Supposons que $x \in S(0, 1)$. Alors $1 = \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

$$\text{Ainsi, } R_s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_n x_i^2 = \lambda_n \text{ et } R_s(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \geq \sum_{i=1}^n \lambda_1 x_i^2 = \lambda_1.$$

On a bien montré que, pour tout $x \in S(0, 1)$, $R_s(x) \in [\lambda_1, \lambda_n]$

5) a) Supposons que s est symétrique défini positif.

Soit λ une valeur propre de s . Il existe un vecteur propre x : x est non nul et $s(x) = \lambda x$.

Ainsi $0 < \langle s(x) | x \rangle = \lambda \|x\|^2$ et $\|x\| > 0$, donc $\lambda > 0$.

Si maintenant s est seulement symétrique positif, on a $0 \leq \lambda \|x\|^2$ donc $\lambda \geq 0$.

b) On a vu que si $s_{i,j}$ est la i -ème coordonnée dans la base B du vecteur $s(e_j)$, alors $s_{i,j} = \langle e_i | s(e_j) \rangle$.

En particulier, $s_{i,i} = \langle e_i | s(e_i) \rangle$, or e_i est un vecteur unitaire, donc d'après la question 4.b,

$$s_{i,i} = R_s(e_i) \in [\lambda_1, \lambda_n].$$

Partie II - Un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

- 6) Les coefficients de $M^T M - I_n$ sont des fonctions polynomiales des coefficients de M , donc d'après le cours, l'application $M \mapsto M^T M - I_n$ est continue.
- 7) D'après le cours, les colonnes de A forment une base orthonormée de \mathbb{R}^n , donc pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 = 1$, ce qui implique : pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $|a_{i,j}| \leq 1$.
- 8) Si, pour tout $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\|M\|_\infty = \max_{(i,j) \in \{1, \dots, n\}^2} |m_{i,j}|$, on définit d'après le cours une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, pour laquelle $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est bornée d'après la question précédente.
- De plus, si l'on note f l'application $M \mapsto M^T M - I_n$ de la question 6, alors $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{0_{n,n}\})$, or le singleton $\{0_{n,n}\}$ est un fermé et f est continue, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- 9) a) D'après la question 2.a, il existe une matrice P orthogonale telle que $S = P\Delta P^{-1} = P\Delta P^T$.
Ainsi, $T(A) = \text{Tr}([AP\Delta]P^{-1}) = \text{Tr}(P^{-1}[AP\Delta]) = \text{Tr}(B\Delta)$ en posant $B = P^{-1}AP$.
Or A et P sont toutes deux orthogonales et $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, donc B est orthogonale.
- b) On vérifie que, pour tout $(C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,
 $\text{Tr}((\alpha C + D)S) = \alpha \text{Tr}(CS) + \text{Tr}(DS)$, donc l'application $C \mapsto \text{Tr}(CS)$ est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R} , or $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, donc c'est une application continue. Sa restriction T sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est donc aussi continue. Mais $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, donc T admet un maximum sur $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
- c) Avec les notations de la question 9.a, $T(A) = \text{Tr}(B\Delta)$, donc en convenant de noter $M_{i,j}$ le (i, j) -ème coefficient d'une matrice M ,

$$T(A) = \sum_{i=1}^n (B\Delta)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{i,j} \Delta_{j,i},$$

mais Δ est diagonale, donc $T(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i B_{i,i}$.

D'après la question 7, et les λ_i étant positifs, $T(A) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{Tr}(S)$.

Ainsi $t \leq \text{Tr}(S)$, mais de plus $\text{Tr}(S) = T(I_n)$ et I_n est une matrice orthogonale, donc $t = \text{Tr}(S)$.

Partie III - Inégalité d'Hadamard

- 10) L'inégalité demandée est une conséquence de la question 1, car on sait que $\det(S) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ et $\text{Tr}(S) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.
- 11) On identifiera $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ avec \mathbb{R}^n .
Soit $X \in \mathbb{R}^n$. $X^T S_\alpha X = (DX)^T S(DX) \geq 0$ car $DX \in \mathbb{R}^n$ et car S est symétrique positive. Ceci montre que $S_\alpha \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
 $\text{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^n (D^T S D)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{(j,k) \in \{1, \dots, n\}^2} [D^T]_{i,j} S_{j,k} D_{k,i}$, mais D est diagonale, donc $\text{Tr}(S_\alpha) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 s_{i,i}$.
- 12) On peut appliquer l'inégalité (*) à la matrice S_α car elle est bien dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$,
or $\det(S_\alpha) = \det(D)^2 \det(S) = \left(\prod_{i=1}^n \alpha_{i,i} \right)^2 \det(S)$ et $\frac{1}{n} \text{Tr}(S_\alpha) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{s_{i,i}} s_{i,i} = 1$,
donc $\det(S) \leq \left(\prod_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_{i,i}} \right)^2 = \prod_{i=1}^n s_{i,i}$.
- 13) Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^T S_\varepsilon X = X^T S X + \varepsilon \|X\|^2 \geq 0$, donc $S_\varepsilon \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. De plus d'après la question 5.b, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $0 \leq \lambda_1 \leq s_{i,i}$, donc $s_{i,i} + \varepsilon > 0$, ce qui permet d'appliquer l'inégalité de la question précédente à S_ε : pour tout $\varepsilon > 0$, $\det(S_\varepsilon) \leq \prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon)$.

De plus il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = P\Delta P^{-1}$, où $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, donc $S_\varepsilon = P(\Delta + \varepsilon I_n)P^{-1}$, ce qui prouve que $\det(S_\varepsilon) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i + \varepsilon)$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\prod_{i=1}^n (\lambda_i + \varepsilon) \leq \prod_{i=1}^n (s_{i,i} + \varepsilon)$ et on conclut en faisant tendre ε vers 0.

Partie IV - Application de l'inégalité d'Hadamard : détermination d'un minimum

- 14) Soit $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. $X^\top BX = (\Omega X)^\top A(\Omega X) > 0$, car $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $\Omega X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (Ω est orthogonale, donc elle est inversible). Ainsi $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

De plus Ω est orthogonale, donc d'après le cours, $|\det(\Omega)| = 1$. Or, $\det(A) = 1$, donc $\det(B) = \det(\Omega)^2 \det(A) = 1$: on a prouvé que $B \in \mathcal{U}$.

$$\text{Tr}(AS) = \text{Tr}([A\Omega\Delta]\Omega^\top) = \text{Tr}(\Omega^\top [A\Omega\Delta]) = \text{Tr}(B\Delta).$$

- 15) D'après la question précédente, $\{\text{Tr}(AS) \setminus A \in \mathcal{U}\} \subset \{\text{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$.

Réciproquement, soit $B \in \mathcal{U}$. On pose $A = \Omega B \Omega^\top$. En adaptant la démonstration de la question précédente, on montre que $A \in \mathcal{U}$ et que $\text{Tr}(AS) = \text{Tr}(B\Delta)$, donc $\{\text{Tr}(AS) \setminus A \in \mathcal{U}\} = \{\text{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$.

Prenons $x \in \{\text{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$. Il existe $B \in \mathcal{U}$ telle que $x = \text{Tr}(B\Delta) = \sum_{i=1}^n \lambda_i B_{i,i}$. Mais $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc d'après 5.b, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $B_{i,i} > 0$. Ainsi $x > 0$. Ceci prouve que $\{\text{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$ est une partie non vide de \mathbb{R} minorée par 0. Elle possède donc une borne inférieure.

- 16) Par application de l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\text{on obtient } \frac{1}{n} \text{Tr}(B\Delta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i B_{i,i} \geq \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i B_{i,i} \right)^{1/n}, \text{ ce qui fournit l'inégalité demandée.}$$

- 17) Soit $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{U}$. D'après la question 11, $\prod_{i=1}^n b_{i,i} \geq \det(B) = 1$, donc $\left(\prod_{i=1}^n b_{i,i} \right)^{1/n} \geq 1$.

$$\text{Ainsi, d'après la question précédente, } \text{Tr}(B\Delta) \geq n \left(\prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{1/n} = n(\det(S))^{1/n}.$$

- 18) Ainsi $n(\det(S))^{1/n}$ est un minorant de $\{\text{Tr}(B\Delta) \setminus B \in \mathcal{U}\}$, or la borne inférieure est le plus grand des minorants, donc $m \geq n(\det(S))^{1/n}$.

$$\text{Pour tout } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, X^\top DX = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i^2 > 0, \text{ donc } D \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).$$

$$\text{De plus } \det(D) = \prod_{i=1}^n \mu_i = \frac{\det(S)}{\lambda_1 \cdots \lambda_n} = 1, \text{ donc } D \in \mathcal{U}. \text{ Or } \text{Tr}(D\Delta) = \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i = n(\det(S))^{1/n}, \text{ donc } m = n(\det(S))^{1/n}.$$