Exercice I

1) *Étude des fonctions U et V.*

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On note $\phi_x : t \mapsto \frac{e^{-tx}-e^{-t}}{t}$ et $\psi_x : t \mapsto \frac{e^{itx}-e^{it}}{t}$ qui sont définies et continues sur $]0,+\infty[$.
Au voisinage de 0. On a

$$\phi_x(t) = \frac{e^{-tx}-e^{-t}}{t} = \frac{1-tx-(1-t)+o(t)}{t} = 1-x+o(1)$$

Cela montre que la fonction ϕ_x est prolongeable par continuité en 0 en posant $\phi_x(0) = 1-x$, elle est donc intégrable sur $[0,1]$. De même,

$$\psi_x(t) = \frac{e^{itx}-e^{it}}{t} = \frac{1+itx-(1+it)+o(t)}{t} = i(x-1)+o(1)$$

Cela montre que la fonction ψ_x est prolongeable par continuité en 0 en posant $\psi_x(0) = i(x-1)$, elle est donc intégrable sur $[0,1]$.
On en déduit que pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, les fonctions ϕ_x et ψ_x sont intégrables sur $[0,r]$; les fonctions U et V sont définies sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, comme ϕ_x et ψ_x sont continues, d'après le théorème fondamental de l'analyse, les fonctions $r \mapsto U(x,r)$ et $r \mapsto V(x,r)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$. De plus

$$\forall r \in \mathbb{R}, \frac{\partial U}{\partial r}(x,r) = \phi_x(r) \text{ et } \frac{\partial V}{\partial r}(x,r) = \psi_x(r)$$

2) *Calcul de l'intégrale $u(x)$ pour $x > 0$.*

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction ϕ_x est continue sur $[0,+\infty[$. De plus

$$t^2\phi_x(t) = te^{-tx} - te^{-t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Cela montre que $\phi_x(t) = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Comme la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ la fonction ϕ_x aussi.
Finalement $u(x)$ est bien définie.

b) Appliquons le théorème de caractère $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètres. Notons pour cette question

$$\phi : (x,t) \mapsto \phi_x(t) = \frac{e^{-tx}-e^{-t}}{t}$$

i) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \phi(x,t)$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$

ii) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto \phi(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

iii) Pour tout $t \in]0,+\infty[$, la fonction $x \mapsto \phi(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t) = \frac{-te^{-tx}}{t} = -e^{-tx}$$

De plus la fonction $(x,t) \mapsto -e^{-tx}$ vérifie les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres.

α) Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto -e^{-tx}$ est continue (par morceaux) sur $]0,+\infty[$

β) Pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto -e^{-tx}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

γ) Domination locale : pour tout $a > 0$,

$$\forall x \in [a,+\infty[, \forall t \in \mathbb{R}_+^*, |-e^{-tx}| \leqslant e^{-ta}$$

Or $t \mapsto e^{-ta}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et $e^{-ta} = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. On en déduit que $t \mapsto e^{-ta}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ comme en 2.a)

On en déduit que u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et pour $x \in]0,+\infty[$,

$$u'(x) = \int_0^{+\infty} -e^{tx}dt = \left[\frac{e^{-tx}}{x}\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{x}$$

c) On déduit de la question précédente qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$u : x \mapsto -\ln(x) + C$$

En remarquant que pour $x = 1$, la fonction $t \mapsto \phi(1, t)$ est la fonction nulle, on obtient que $u(1) = 0$ et donc $C = 0$.

Finalement $\boxed{u : x \mapsto -\ln(x)}$

3) *Calcul de l'intégrale* $v(x)$ *pour* $x > 0$.

a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Appliquons le théorème de caractère $\mathscr{C}^1$ des intégrales à paramètres. Notons pour cette question

$$\alpha : (r, t) \mapsto e^{-xre^{-it}}$$

où α est définie sur $\mathbb{R}_+ \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

i) Pour tout $r \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \alpha(r, t)$ est continue (par morceaux) sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

ii) Pour tout $r \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \alpha(r, t)$ est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ car elle est continue sur un segment.

iii) Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $r \mapsto \alpha(r, t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \frac{\partial \alpha}{\partial x}(r, t) = -xe^{-it}e^{-xre^{-it}}$$

De plus la fonction $(r, t) \mapsto \dfrac{\partial \alpha}{\partial x}(r, t)$ vérifie les hypothèses du théorème de continuité des intégrales à paramètres.

α) Pour tout $r \in \mathbb{R}_+0$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial \alpha}{\partial x}(r, t)$ est continue (par morceaux) sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

β) Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, la fonction $r \mapsto \dfrac{\partial \alpha}{\partial x}(r, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

γ) Domination :

$$\forall r \in \mathbb{R}_+, \forall t \in [0, \frac{\pi}{2}], \left| -xe^{-it}e^{-xre^{-it}} \right| \leqslant xe^{-xr\cos(t)} \leqslant x$$

De plus $t \mapsto x$ est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On en déduit que $r \mapsto \varphi(x, r)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et pour $r \in [0, +\infty[$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}(x, r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -xe^{-it}e^{-xre^{-it}} dt$$

Pour $r \neq 0$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -xe^{-it}e^{-xre^{-it}} dt = \left[-\frac{1}{ir} e^{-xre^{-it}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{ir} \left(e^{-xr} - e^{xri} \right)$$

et pour $r = 0$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}(x, r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -xe^{-it} dt = \left[\frac{x}{i} e^{-it} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{x}{i}(-i - 1)$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $A : r \mapsto U(x, r) - V(x, r)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est

$$A'(r) = \frac{\partial U}{\partial r}(x, r) - \frac{\partial V}{\partial r}(x, r) = \begin{cases} \dfrac{e^{-rx} - e^{-r} - e^{irx} + e^{ir}}{r} & \text{si } r \neq 0 \\ 1 - x - i(x - 1) & \text{si } r = 0 \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $B : r \mapsto i\varphi(x, r) - i\varphi(1, r)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et sa dérivée est

$$B'(r) = i\frac{\partial \varphi}{\partial r}(x, r) - i\frac{\partial \varphi}{\partial r}(1, r) = \begin{cases} \dfrac{e^{-rx} - e^{xri} - e^{-r} + e^{ri}}{r} & \text{si } r \neq 0 \\ \dfrac{x}{i}(-i - 1) - \dfrac{1}{i}(-i - 1) = 1 - x - i(x - 1) & \text{si } r = 0 \end{cases}$$

Cela montre que pour tout $r \in \mathbb{R}_+$ que $A'(r) = B'(r)$. De plus, pour $r = 0$,

$$A(0) = U(x, 0) - V(x, 0) = 0 \quad \text{et} \quad B(0) = i\varphi(x, 0) - i\varphi(1, 0) = i\frac{\pi}{2} - i\frac{\pi}{2} = 0$$

On en déduit que pour tout $(x, r) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$$U(x, r) - V(x, r) = i\varphi(x, r) - i\varphi(1, r)$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $r \in \mathbb{R}_+$,

$$|\varphi(x,r)| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|e^{-xre^{-it}}\right| dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xr\cos t} dt$$

En appliquant la version continue du théorème de convergence dominée montrons que

$$\lim_{r\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xr\cos t} dt = 0$$

On pose pour $r \in \mathbb{R}_+$ et $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\beta(r,t) = e^{-xr\cos t}$.

i) Pour tout $r \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \beta(r,t)$ est continue (par morceaux) sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

ii) Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\lim_{r\to+\infty} e^{-xr\cos t} = \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On pose $\gamma : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$ qui est continue par morceaux sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

iii) Domination : Pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $|\beta(r,t)| \leqslant 1$. La fonction $t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

On en déduit que

$$\lim_{r\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xr\cos t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \gamma(t) dt = 0$$

Cela montre que $\lim\limits_{r\to+\infty} \varphi(x,r) = 0$

d) Soit $x > 0$. En utilisant la question 3.b) on obtient que pour $r \in \mathbb{R}_+$,

$$V(x,r) = U(x,r) - i\varphi(x,r) + i\varphi(1,r)$$

En faisant tendre r vers $+\infty$ on obtient que l'intégrale $v(x)$ converge et que

$$v(x) = \lim_{r\to+\infty} V(x,r) = \lim_{r\to+\infty} U(x,r) = u(x) = -\ln(x)$$

Exercice II - (16 p 57)

1) La fonction f est polynomiale. Elle est donc de classe $\mathscr{C}^1$.

2) Posons $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$. On a

$$\det(M+H) = \begin{vmatrix} m_{11}+h_{11} & m_{12}+h_{12} \\ m_{21}+h_{21} & m_{22}+h_{22} \end{vmatrix} = (m_{11}+h_{11})(m_{22}+h_{22}) - (m_{12}+h_{12})(m_{21}+h_{21})$$

En développant et en regroupant les termes on obtient

$$\det(M+H) = \det(M) + m_{11}h_{22} + m_{22}h_{11} - m_{12}h_{21} - m_{21}h_{12} + h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}$$

On remarque alors que $\tilde{M} = \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix}$, si bien que

$$\operatorname{tr}(\tilde{M}H) = m_{22}h_{11} - m_{12}h_{21} - m_{21}h_{12} + m_{11}h_{22}$$

Si de plus on note $||.||_\infty$ la norme infinie de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on a

$$|h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}| \leqslant 2||H||_\infty^2$$

Cela montre que

$$\det(M+H) = \det(M) + \operatorname{tr}(\tilde{M}H) + o(H)$$

Cela implique que

$$\forall (M,H) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2, \mathrm{d}f_M(H) = \operatorname{tr}(\tilde{M}H)$$

3) Passons au cas général.

Première méthode : soit $(M, H) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$. Notons $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice M et $H_1, \dots, H_n$ celles de la matrice H. On a note alors $M + H = (C_1 + H_1 | C_2 + H_2 | \cdots | C_n + H_n)$.

Par multilinéarité

$$\det(M+H) = \det(C_1 + H_1 | \cdots | C_n + H_n) = \det(M) + \sum_{j=1}^{n} \det(C_1 | \cdots | C_{j-1} | H_j | C_{j+1} | \cdots | C_n) + \varphi(M, H)$$

où φ regroupe tous les termes contenant au moins deux fois une colonne provenant de la matrice H.

Comme on sait que le déterminant est multilinéaire, il existe une constante $C > 0$ telle que pour $(X_1, \dots, X_n) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})^n$,

$$|\det(X_1 | \cdots | X_n)| \leqslant C N_\infty(X_1) \cdots N_\infty(X_n)$$

où N_∞ désigne la norme infinie sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. En particulier, pour $k \in [\![2, n]\!]$ et α_k un des terme apparaissant dans φ faisant apparaitre k termes de la matrice H et $n - k$ termes de la matrice M,

$$|\alpha_k| \leqslant C ||H||_\infty^k ||M||_\infty^{n-k}$$

On en déduit que $\varphi(M, H) = o(H)$ comme somme finie de termes étant tous de la forme $||H||_\infty \varepsilon(H)$ avec ε tendant vers 0 en 0.

Comme de plus l'application

$$\theta_M : H \mapsto \sum_{i=1}^{n} \det(C_1 | \cdots | C_{j-1} | H_j | C_{j+1} | \cdots | C_n)$$

est linéaire, on obtient que $df_M = \theta_M$.

Il reste à calculer $\theta_M(H)$. On note $E_1, \dots E_n$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ de sorte que $H_j = \sum\limits_{i=1}^{n} h_{ij} E_i$. On en déduit par linéarité que

$$\theta_M(H) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} h_{ij} \det(C_1 | \cdots | C_{j-1} | E_j | C_{j+1} | \cdots | C_n)$$

En développant selon la j-eme colonne, $\det(C_1 | \cdots | C_{j-1} | E_j | C_{j+1} | \cdots | C_n) = \Delta_{ij}$ où Δ_{ij} désigne le cofacteur d'indice i, j de M. On en déduit que

$$df_M(H) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} h_{ij} = \operatorname{tr}(\tilde{M} H)$$

Deuxième méthode :

— Commençons par traiter le cas où $M = I_n$. On peut procéder comme lors de la première méthode mais nous allons plutôt le faire en utilisant χ_A le polynôme caractéristique de A. On a

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \chi_A(x) = \det(xI_n - A) = x^n \det\left(I_n - \frac{1}{x} A\right)$$

En posant $u = -\frac{1}{x}$ on a donc

$$\begin{aligned}
\det(I_n + uA) &= (-u)^n \chi_A\left(-\frac{1}{u}\right) \\
&= (-u)^n \times \left(\left(-\frac{1}{u}\right)^n - \operatorname{tr}(A)\left(-\frac{1}{u}\right)^{n-1} + \cdots\right) \\
&= 1 + \operatorname{tr}(A) u + o(u)
\end{aligned}$$

Si $A \neq 0$, on peut calculer la dérivée selon A de f en I_n

$$D_A f(I_n) = \lim_{u \to 0} \frac{f(I_n + uA) - f(I_n)}{u} = \operatorname{tr}(A)$$

Cela montre que

$$df_{I_n} : A \mapsto \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(\tilde{I_n} A)$$

car la comatrice de la matrice I_n est I_n elle-même.

— On suppose que M est inversible. Pour $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\det(M+H) = \det(M(I_n + M^{-1}H)) = \det(M)\det(I_n + M^{-1}H)$$

D'après ce qui précède, il existe une fonction ε qui tend vers 0 en 0 telle que

$$\det(I_n + M^{-1}H) = 1 + df_{I_n}(M^{-1}H) + M^{-1}H\varepsilon(M^{-1}H) = 1 + \mathrm{tr}(M^{-1}H) + M^{-1}H\varepsilon(M^{-1}H)$$

Par continuité du produit matriciel on a donc

$$\det(M+H) = \det(M) + \det(M)\mathrm{tr}(M^{-1}H) + o(H)$$

On en déduit que

$$df_M : H \mapsto \mathrm{tr}(\det(M)M^{-1}H) = \mathrm{tr}(\tilde{M}H)$$

Pour la dernière égalité on a utilisé que $M\tilde{M} = \det(M)I_n$ et donc $\tilde{M} = \det(M)M^{-1}$.

— Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ fixée. Pour toute matrice M, les coefficients de $\tilde{M}$ sont les cofacteurs de M qui sont des polynômes en les coefficients de M. Cela montre que $M \mapsto \tilde{M}$ est continue. Comme le produit matriciel est continue et que tr aussi car c'est une application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie, l'application $a : M \mapsto \mathrm{tr}(\tilde{M}H)$ est continue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$.
De plus, comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, l'application $df : M \mapsto df_M$ est continue de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$.
Soit e_H d'évaluation en H définie par

$$e_H : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C}) & \to & \mathbb{C} \\ u & \mapsto & u(H) \end{array}$$

L'application e_H est continue car linéaire et $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ est de dimension finie. On en déduit que $b : M \mapsto df_M(H)$ est continue comme composée d'application continue car $b = e_H \circ df$.
Finalement les applications a et b coïncident sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ qui est dense [1] dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ d'après ce qui précède donc, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$,

$$df_M(H) = b(M) = a(M) = \mathrm{tr}(\tilde{M}H)$$

1. pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\rho = \inf\{|\lambda|\ ,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(M) \setminus \{0\}\}$ le module de la plus petite valeur propre non nulle M (en module), en convenant que $\rho = 1$ si M n'a pas de valeurs propres non nulles. Pour tout $p \geqslant 2$, $\frac{\rho}{p} \in]0, \rho[$ donc ce n'est pas une valeur propre de M. On en déduit que $M_p = M - \frac{\rho}{p}I_n$ est inversible. Comme $(M_p) \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} M$ on obtient que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.