Exercice I

On pose

$$u : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t} dt, \quad v : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{itx} - e^{it}}{t} dt.$$

De même, on pose

$$U : (x,r) \mapsto \int_0^{r} \frac{e^{-tx} - e^{-t}}{t} dt, \quad V : (x,r) \mapsto \int_0^{r} \frac{e^{itx} - e^{it}}{t} dt.$$

1) *Étude des fonctions U et V.*
   a) Montrer que les fonctions U et V sont définies sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$.
   b) Déterminer les dérivées partielles $\dfrac{\partial U}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial V}{\partial r}$.
2) *Calcul de l'intégrale $u(x)$ pour $x > 0$.*
   a) Justifier que u est définie sur $\mathbb{R}_+^*$
   b) Montrer que la fonction u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Donner l'expression (sans intégrale) de $u'(x)$ pour tout $x > 0$.
   c) En déduire la valeur de l'intégrale $u(x)$ pour $x > 0$.
3) *Calcul de l'intégrale $v(x)$ pour $x > 0$.*
   Pour tout $x > 0$ et tout $r \geqslant 0$, on introduit l'intégrale suivante :

$$\varphi(x,r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-xre^{-it}} dt.$$

   a) Montrer que la fonction $r \mapsto \varphi(x,r)$ est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   Donner, pour $x > 0$ et $r \in \mathbb{R}_+$, l'expression (sans intégrale) de $\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}(x,r)$.
   b) Montrer que pour $(x,r) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$,

$$U(x,r) - V(x,r) = i\varphi(x,r) - i\varphi(1,r).$$

   c) Pour tout $x > 0$, déterminer la limite de $\varphi(x,r)$ lorsque r tend vers $+\infty$.
   d) En déduire pour $x > 0$ la convergence de l'intégrale $v(x)$ et l'égalité $u(x) = v(x)$.

Exercice II - (16 p 57)

Montrer que l'application $f : M \mapsto \det(M)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et que

$$\forall (M,H) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2, \mathrm{d}f_M(H) = \mathrm{tr}(\tilde{M}H)$$

où $\tilde{M}$ est la transposée de la comatrice de M.
On pourra commencer en étudiant le cas $n = 2$.