Notations et conventions

— Dans ce problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.
— On confond vecteur de $\mathbb{R}^n$ et matrice colonne correspondante, ce qui permet des écritures du type Ax où A est une matrice carrée réelle de taille n et x un élément de $\mathbb{R}^n$.
— Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et si x est un élément de $\mathbb{R}^n$, on note

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))$$

ce qui, compte tenu de la convention précédente, s'écrit aussi

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

Si i et j sont deux entiers de $[\![1, n]\!]$, la j-ème dérivée partielle de f_i en x est notée $D_j f_i(x)$ ou a $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$
— Le déterminant d'une matrice carrée A est noté $\det(A)$.
— Avec les notations précédentes, on appelle matrice jacobienne de f en x et on note J_f la matrice carrée réelle de taille n dont le terme situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne est $D_j f_i$,
— On appelle jacobien de f en x et on note $\text{jac}_f(x)$, le déterminant $\det(J_f(x))$ de la matrice jacobienne $J_f(x)$.

Partie I - Matrice jacobienne symétrique, antisymétrique

Au début de la partie f désigne une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui même.
Si i, j et k sont trois entiers de $[\![1, n]\!]$, la dérivée partielle seconde de f_k en x par rapport aux variables x_i et x_j est notée $D_{i,j} f_k(x)$ ou $\dfrac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}(x)$, ou encore $f_{i,j,k}(x)$.

1) Justifier que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et tous i, j et k dans $[\![1, n]\!]$, on a $f_{i,j,k}(x) = f_{j,i,k}(x)$.
2) Dans cette section, on suppose que la matrice jacobienne J_f est antisymétrique pour tout x dans $\mathbb{R}^n$.
   a) Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, et tous i, j et k dans $[\![1, n]\!]$, $f_{i,j,k}(x) = -f_{i,k,j}(x)$.
   b) En déduire que, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et tous i, j et k dans $[\![1, n]\!]$, on a $f_{i,j,k}(x) = 0$.
   c) Montrer qu'il existe une matrice carrée réelle A de taille n et un élément b de $\mathbb{R}^n$ tels que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$.
   Justifier que A est antisymétrique.
   d) Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur f, la matrice jacobienne $J_f(x)$ est-elle antisymétrique pour tout x dans $\mathbb{R}^n$?
3) Maintenant f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.
   Montrer que la matrice jacobienne J_f est symétrique pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si il existe g de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ f_i(x) = D_i g(x)$$

On pourra considérer l'application g définie par $g(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 f_i(tx)dt$ et on exprimera $D_i g(x)$ sous forme d'une seule intégrale.

Partie II - Matrice jacobienne orthogonale

Dans cette partie, f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.
On considère la proposition

$(\mathscr{P})$ Pour tout x de $\mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne $J_f(x)$ de f est orthogonale.

Pour x dans $\mathbb{R}^n$ et i, j, k dans $[\![1, n]\!]$, on note

$$\alpha_{i,j,k}(x) = \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x).\frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k}(x)$$

4) On suppose $(\mathscr{P})$.

 a) Montrer que pour tous i, j et k de $[\![1, n]\!]$, $\alpha_{i,j,k} = \alpha_{i,k,j} = -\alpha_{k,j,i}$.

 b) En déduire que pour tous i, j et k de $[\![1, n]\!]$, $\alpha_{i,j,k} = 0$.

 c) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale A et un élément b de $\mathbb{R}^n$ tels que, pour tout x de $\mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax + b$

 On pourra interpréter les relations $\alpha_{i,j,k} = 0$ à l'aide de produits matriciels.

5) Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même.
À quelle condition nécessaire et suffisante portant sur f, la proposition $(\mathscr{P})$ est-elle réalisée ?

6) Si g est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on note $\Delta_g(x) = \sum_{i=}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}$ (laplacien de g en x).

 Montrer que $(\mathscr{P})$ est équivalente à la proposition

 $(\mathscr{Q})$ Pour toute fonction g de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $\Delta_{g \circ f} = (\Delta_g) \circ f$.