

Exercice I

- 1) A est symétrique réelle donc diagonalisable (et même orthodiagonalisable).

De manière évidente, on observe que :

- $(1, 1, 1)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 4 ;
- l'orthogonal du vecteur $(1, 1, 1)$ est engendré par $(1, -1, 0)$ et $(1, 0, -1)$, qui sont des vecteurs propres linéairement indépendants associés à la valeur propre 1.

On en déduit que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \text{diag}(4, 1, 1)$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$.

Pour la suite, on calcule $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

On peut aussi utiliser une matrice **orthogonale** en normalisant les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

On obtient la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$, et $Q^{-1} = Q^T$.

- 2) Posons $B = P \text{diag}(2, 1, 1)P^{-1} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a alors $B^2 = P \text{diag}(2, 1, 1)^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

Plus explicitement, $B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

- 3) $A^n = PD^nP^{-1} = P \text{diag}(4^n, 1, 1)P^{-1}$, ce qui donne après calculs : $A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}$.

- 4) Comme A est diagonalisable, son polynôme minimal π_A est scindé à racines simples qui sont les valeurs propres de A , d'où $\pi_A = (X - 4)(X - 1) = X^2 - 5X + 4$.

On effectue la division euclidienne de X^n par π_A :

$$X^n = \pi_A Q + aX + b \quad (*)$$

avec $Q \in \mathbb{R}[X]$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

En évaluant (*) en 1 et 4, on obtient le système $\begin{cases} a + b = 1 \\ 4a + b = 4^n \end{cases}$ d'unique solution $(a, b) = \left(\frac{4^n - 1}{3}, \frac{4 - 4^n}{3} \right)$.

En évaluant maintenant (*) en A , on obtient : $A^n = 0Q(A) + aA + bI_3$, d'où finalement :

$$A^n = \frac{4^n - 1}{3}A + \frac{4 - 4^n}{3}I_3.$$

On peut également utiliser l'interpolation de Lagrange :

$$A^n = R(A) = \left(1^n \frac{X-1}{4-1} + 4^n \frac{X-4}{1-4} \right) (A) = \frac{A - I_3}{3} - 4^n \frac{A - 4I_3}{3}$$

Exercice II

- 5) $\boxed{\text{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas fermé dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, car la suite $\left(\frac{1}{k} I_n \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ a pour limite la matrice nulle qui n'est pas dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ (on a utilisé la caractérisation séquentielle des fermés).
- 6) $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est l'image réciproque par l'application déterminant, qui est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de l'ouvert \mathbb{R}^* de \mathbb{R} (complémentaire du fermé $\{0\}$), donc $\boxed{\text{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ est un ouvert de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.
- 7) Si le polynôme caractéristique χ_M possède une racine strictement positive, on note ρ la plus petite de ces racines (un tel minimum existe bien car l'ensemble des racines est fini) ; sinon on pose $\rho = 1$.
Ainsi, $\boxed{\rho > 0}$ et le polynôme caractéristique χ_M n'a pas de racine dans l'intervalle $]0, \rho[$, d'où :

$$\boxed{\forall \lambda \in]0, \rho[}, \quad \det(M - \lambda I_n) = (-1)^n \chi_M(\lambda) \neq 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{M - \lambda I_n \in \text{GL}_n(\mathbb{R})}.$$

La suite $\left(M - \frac{\rho}{k} I_n \right)_{k \geq 2}$ est alors à valeurs dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ et converge vers M , matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui montre que $\boxed{\text{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ est dense dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$.

- 8) Si $B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, les matrices AB et BA sont semblables car $AB = B^{-1}(BA)B$, donc elles ont le même polynôme caractéristique.

Considérons les applications φ_1 et $\varphi_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R}_n[X])$ définies par $\varphi_1(B) = \chi_{AB}$ et $\varphi_2(B) = \chi_{BA}$ (la matrice A étant fixée et quelconque dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Nous venons de voir que φ_1 et φ_2 coïncident sur $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

D'autre part, φ_1 est continue, par composition de l'application $B \mapsto AB$, continue car linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie, avec $M \mapsto \chi_M$ qui est aussi continue par caractérisation à l'aide des coordonnées dans une base, car les coefficients du polynôme caractéristique de M sont polynomiaux en les coefficients de M . De même, φ_2 est continue. Peu important ici les normes dont on a munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_n[X]$ car ces espaces vectoriels sont de dimension finie.

Comme $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que φ_1 et φ_2 coïncident sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ce qui montre que $\boxed{\text{les polynômes caractéristiques de } AB \text{ et } BA \text{ sont égaux}}$ quelles que soient les matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour les matrices élémentaires A et B données dans l'énoncé, $AB = 0$ donc $\pi_{AB} = X$, tandis que $BA = B$ d'où $\pi_{BA} \neq X$ car cette matrice est non nulle (son polynôme minimal est en fait égal à X^2), donc le résultat précédent $\boxed{\text{n'est pas vrai pour les polynômes minimaux}}$.

- 9) Remarquons que le résultat à démontrer est faux pour $n = 0$ car $\text{GL}_0(\mathbb{R}) = \{I_0\}$ (où I_0 est la matrice vide) est connexe par arcs. Nous supposons désormais que $n \geq 1$.

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est connexe par arcs.

Son image par l'application déterminant, qui est continue, est alors connexe par arcs.

Or puisque $n \geq 1$ cette image est égale à \mathbb{R}^* : l'inclusion directe est évidente et l'inclusion réciproque s'obtient en prenant pour antécédent d'un réel x non nul la matrice $\text{diag}(x, 1, \dots, 1) \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

On voit que \mathbb{R}^* n'étant pas connexe par arcs puisque ce n'est pas un intervalle de \mathbb{R} (par exemple, $(-1, 1) \in (\mathbb{R}^*)^2$ mais $[-1, 1] \not\subset \mathbb{R}^*$), on obtient ainsi une contradiction et on en déduit que $\boxed{\text{GL}_n(\mathbb{R}) \text{ n'est pas connexe par arcs}}$.

Problème

Remarque : il y a une maladresse dans le sujet qui définit la similitude de rapport k alors qu'il en existe bien sur plusieurs.

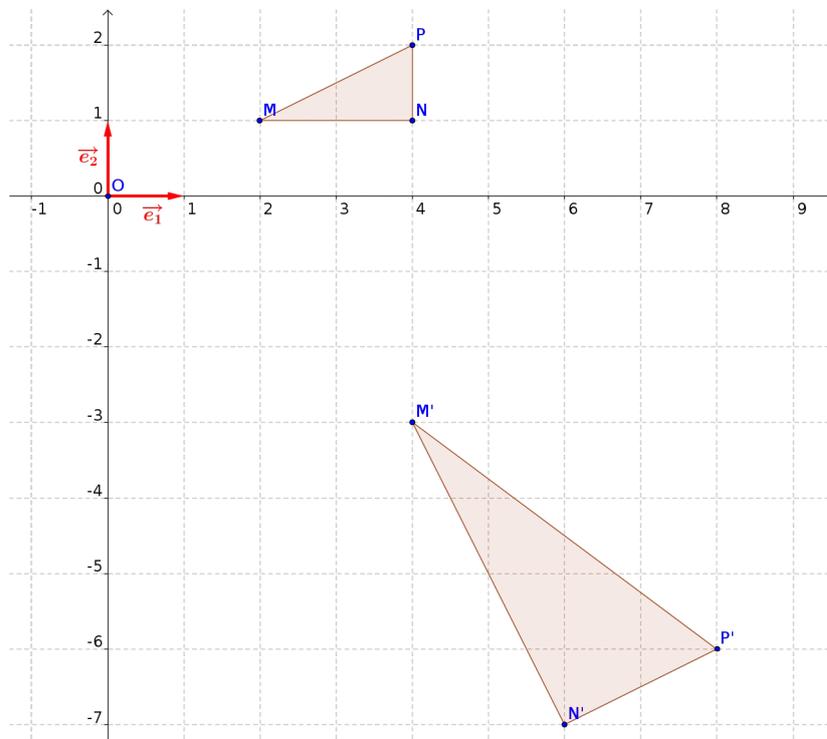
Partie I - Exemples, propriétés

- 10) On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A . Par définition, pour $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $u(X) = (x + 2y, -2x + y)$ donc

$$\|u(X)\| = \sqrt{(x + 2y)^2 + (-2x + y)^2} = \sqrt{x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x^2 - 4xy + y^2} = \sqrt{5} \|X\|$$

On en déduit que u est une similitude de rapport $k = \sqrt{5}$.

- 11) On a les trois points $M'(4, -3)$, $N'(6, -7)$ et $P'(8, -6)$.



Le triangle MNP étant rectangle en N , son aire vaut : $\mathcal{A}_{MNP} = \frac{MN \times NP}{2} = \frac{2 \times 1}{2} = 1$.

De même, le rectangle $M'N'P'$ est rectangle en N' car $\overrightarrow{M'N'} = (2, -4)$ et $\overrightarrow{N'P'} = (2, 1)$ et donc le produit scalaire $\overrightarrow{M'N'} \cdot \overrightarrow{N'P'} = 4 - 4 = 0$. On en déduit que

$$\mathcal{A}_{M'N'P'} = \frac{M'N' \times N'P'}{2} = \frac{\sqrt{4 + 16} \times \sqrt{4 + 1}}{2} = 5$$

On remarque que $\mathcal{A}_{M'N'P'} = 5\mathcal{A}_{MNP} = k^2\mathcal{A}_{MNP}$, avec $k = \sqrt{5}$ le rapport de la similitude.

Remarque : On peut aussi calculer l'aire en utilisant un déterminant relativement à la base canonique :

$$\mathcal{A}_{M'N'P'} = \left| \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}) \right| = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} \right| = 5$$

12) Soit $u \in \text{Sim}(E)$ de rapport $k > 0$.

Si $x \in \text{Ker}(u)$, alors $k\|x\| = \|u(x)\| = \|0\| = 0$, donc $\|x\| = 0$ car $k \neq 0$, d'où $x = 0$ par séparation de la norme. On a donc $\text{Ker}(u) = \{0\}$ (l'inclusion réciproque étant évidente) d'où u est injectif.

Comme u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que u est bijectif.

Montrons que $\text{Sim}(E)$ est un sous-groupe de $(\text{GL}(E), \circ)$.

- $\text{Sim}(E) \subset \text{GL}(E)$ d'après ce qui précède.
- $\text{Sim}(E) \neq \emptyset$ car id_E est une similitude de rapport 1.
- **Stabilité par \circ :**

Soit u et $v \in \text{Sim}(E)$, de rapports respectifs k et k' dans \mathbb{R}_+^* .

On a alors pour tout $x \in E$: $\|u \circ v(x)\| = \|u(v(x))\| = k\|v(x)\| = kk'\|x\|$

Ainsi, $u \circ v$ est une similitude de rapport $kk' > 0$, ce qui montre que $\text{Sim}(E)$ est stable par \circ .

- **Stabilité par inverse :**

Soit $u \in \text{Sim}(E)$.

Pour tout $x \in E$: $\|x\| = \|u \circ u^{-1}(x)\| = k\|u^{-1}(x)\|$, d'où $\|u^{-1}(x)\| = \frac{1}{k}\|x\|$ avec $\frac{1}{k} > 0$.

Ainsi, u^{-1} est une similitude de rapport $\frac{1}{k}$, ce qui montre que $\text{Sim}(E)$ est stable par inverse.

Finalement, $\text{Sim}(E)$ est un sous-groupe de $(\text{GL}(E), \circ)$, donc $\text{Sim}(E)$ est un groupe pour la loi \circ .

13) On procède par double implication

- \Rightarrow On suppose que $u \in \text{O}(E)$. On sait que u préserve le produit scalaire c'est-à-dire que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x)|u(y) \rangle = \langle x|y \rangle$.

On note $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ les matrices colonnes des coordonnées de x et de y dans \mathcal{B} . On sait que AX et AY sont les matrices colonnes des coordonnées de $u(x)$ et $u(y)$. Comme de plus la base \mathcal{B} est orthonormée,

$$\langle u(x)|u(y) \rangle = {}^t(AX)(AY) = {}^tX^tAAY \text{ et } \langle x|y \rangle = {}^tXY$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $E_i = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_i)$

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$({}^tAA)[i, j] = {}^tE_i({}^tAA)E_j = \langle u(e_i)|u(e_j) \rangle = \langle e_i|e_j \rangle = \delta_{ij}$$

Cela montre que ${}^tAA = I_n$

- \Leftarrow On suppose que ${}^tAA = I_n$. En gardant les notations ci-dessus, pour $x \in E$

$$\|u(x)\|^2 = \langle u(x)|u(x) \rangle = {}^t(AX)(AX) = {}^tX^tAAX = {}^tXX = \langle x|x \rangle = \|x\|^2$$

On en déduit que $\|u(x)\| = \|x\|$ puis que l'endomorphisme u appartient bien à $\text{O}(E)$

On veut réaliser la même preuve pour les similitudes. Commençons par étudier le lien entre une similitude et un produit scalaire. Soit u une similitude de E de rapport $k > 0$. Soit $(x, y) \in E^2$,

on utilise les formules de polarisation :

$$\begin{aligned}
 \langle u(x)|u(y) \rangle &= \frac{1}{2} (\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2) \\
 &= \frac{1}{2} (\|u(x+y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2) \\
 &= \frac{1}{2} (k^2 \|u(x+y)\|^2 - k^2 \|u(x)\|^2 - k^2 \|u(y)\|^2) \\
 &= \frac{k^2}{2} (\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\
 &= k^2 \langle x|y \rangle
 \end{aligned}$$

Réciproquement, si u est un endomorphisme de E tel que pour $(x, y) \in E^2$, $\langle u(x)|u(y) \rangle = k^2 \langle x|y \rangle$ avec $k > 0$, alors,

$$\|u(x)\| = \sqrt{\|u(x)\|^2} = \sqrt{\langle u(x)|u(x) \rangle} = \sqrt{k^2 \langle x|x \rangle} = k \|x\|$$

Il suffit alors de recopier la preuve ci-dessus pour obtenir la caractérisation matricielle des similitudes : l'endomorphisme u est une similitude de rapport k si, et seulement si, ${}^tAA = k^2 I_n$.

14) Notons u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

Après calculs on trouve ${}^tAA = 9I_3$, donc d'après la question précédente et le caractère orthonormé de la base canonique de \mathbb{R}^3 , u est une similitude de rapport 3 .

La matrice de la similitude u^{-1} est $A^{-1} = \frac{1}{9} {}^tA = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $f \in O(E)$, de matrice M dans la base canonique.

La matrice de $u^{-1} \circ f \circ u$ dans la base canonique est $N = A^{-1}MA = \frac{1}{9} {}^tAMA$. Calculons tNN .

$$\begin{aligned}
 {}^tNN &= \frac{1}{81} {}^tA {}^tMA {}^tAMA \\
 &= \frac{1}{9} {}^tA {}^tMMA && \text{car } A {}^tA = A \times 9A^{-1} = 9I_3 \\
 &= \frac{1}{9} {}^tAA && \text{car } {}^tMM = I_3, \text{ puisque } f \in O(E) \\
 &= I_3 && \text{car } {}^tAA = 9I_3.
 \end{aligned}$$

La base canonique est orthonormée, donc, grâce à la question 13), $u^{-1} \circ f \circ u \in O(E)$.

Remarque : le résultat prouvé est vrai pour toute similitude et pas juste pour la similitude de cet exemple.

15) On note $S(x, r)$ la sphère de centre $x \in E$ et de rayon $r > 0$.

Soit u un endomorphisme de E possédant la propriété de l'énoncé. En particulier, l'image par u de $S(0, 1)$ est égale à $S(0, k)$ pour un certain $k > 0$. Montrons que u est une similitude de rapport k .

Soit $x \in E \setminus \{0\}$. Le vecteur $\frac{x}{\|x\|}$ est de norme 1, donc il appartient à $S(0, 1)$. On en déduit

que son image par u appartient à $S(0, k)$, d'où $\left\| u \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = k$.

Or $\left\| u \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \left\| \frac{1}{\|x\|} u(x) \right\| = \frac{\|u(x)\|}{\|x\|}$, d'où $\|u(x)\| = k\|x\|$, cette dernière égalité restant valable lorsque x est le vecteur nul.

Nous avons ainsi montré que u est une similitude de E .

Partie II - Assertions équivalentes

- 16) • \Rightarrow Soit $u \in \text{Sim}(E)$ de rapport $k > 0$. Soit h l'homothétie de rapport k . Elle est bijective et sa bijection réciproque est l'homothétie de rapport $\frac{1}{k}$. Posons alors $v = u \circ h^{-1}$ de sorte que $u = v \circ h$.
Pour $x \in E$,

$$\|v(x)\| = \|u(h^{-1}(x))\| = \left\| u\left(\frac{1}{k}x\right) \right\| = \frac{1}{k} \|u(x)\| = \|x\|$$

Cela montre que $v \in \text{O}(E)$.

On obtient que u est la composée d'une homothétie vectorielle et d'un élément de $\text{O}(E)$

- \Leftarrow Soit $u = h \circ v$ avec h une homothétie non nulle de E et $v \in \text{O}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ le rapport de h .

On voit que $u \in \mathcal{L}(E)$ (car $\mathcal{L}(E)$ est stable par composition) et que pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| = \|\lambda v(x)\| = |\lambda| \|v(x)\| = |\lambda| \|x\|$$

avec $|\lambda| > 0$, donc u est une similitude de rapport $|\lambda|$.

- 17) On pose $H = \sqrt{5} I_2$ qui est la matrice d'une homothétie (dans la base canonique) et $B = \frac{1}{\sqrt{5}} A$.

Notons v l'endomorphisme canoniquement associé à B .

L'endomorphisme u canoniquement associé à A étant une similitude de rapport $\sqrt{5}$ (question 10)), $v = \frac{1}{\sqrt{5}} u$ est un automorphisme orthogonal d'après la question précédente. Son déterminant est égal à 1 donc il s'agit d'une rotation de \mathbb{R}^2 .

Son angle θ vérifie $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}} < 0$, donc $\theta = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Finalement, v est la rotation de \mathbb{R}^2 d'angle $-\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

- 18) Soient x et y dans E .

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y | x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2 \\ \|x - y\|^2 &= \langle x - y | x - y \rangle = \|x\|^2 - 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

d'où par différence : $\langle x | y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ (formule de polarisation).

La suite de la question a déjà été traitée à la question 13)

Remarque : la question n'est pas claire ici. On a supposé que u était supposée linéaire. Le cas non linéaire est traité à la question 20).

- 19) • \Rightarrow Soit $u \in \text{Sim}(E)$ de rapport k . Soit x et y dans E tels que $\langle x | y \rangle = 0$.
D'après la question précédente, $\langle u(x) | u(y) \rangle = k^2 \langle x | y \rangle = 0$. Ainsi, u conserve l'orthogonalité
- \Leftarrow On suppose que u est un endomorphisme qui conserve l'orthogonalité. On suppose **de plus** que u n'est pas nul (cela aurait du être écrit dans l'énoncé).
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E . Soit i et j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\langle e_i + e_j | e_i - e_j \rangle = \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 = 1 - 1$$

On en déduit que $\langle e_i + e_j | e_i - e_j \rangle = 0$.

Comme u préserve l'orthogonalité, on a aussi $\langle u(e_i + e_j) | u(e_i - e_j) \rangle$, ce qui donne par linéarité de u : $\langle u(e_i) + u(e_j) | u(e_i) - u(e_j) \rangle = 0$, donc $\|u(e_i)\|^2 - \|u(e_j)\|^2 = 0$, d'où

$$\boxed{\|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|}$$

Soit k la valeur commune des $\|u(e_i)\|$, $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comme on a supposé que u n'était pas nul, $k > 0$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\|u(e_i)\| = k$ et $\|e_i\| = 1$, d'où $\boxed{\|u(e_i)\| = k\|e_i\|}$ (cette égalité, bien que demandée par l'énoncé, n'est d'aucune utilité pour la suite).

Soit $x \in E$ on pose $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Par linéarité, $u(x) = \sum_{i=1}^n x_i u(e_i)$.

Les vecteurs e_i étant deux à deux orthogonaux, il en est de même des $u(e_i)$ car u conserve l'orthogonalité, donc d'après le théorème de Pythagore :

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \|u(e_i)\|^2 = k^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 = k^2 \|x\|^2$$

La dernière égalité ci-dessus provient du caractère orthonormé de la base \mathcal{B} . Finalement $\|u(x)\| = k\|x\|$.

On a ainsi montré que $\boxed{u \text{ est une similitude de rapport } k}$

20) Soit x et y dans E et λ dans \mathbb{R} . On veut montrer que le vecteur $z = \lambda u(x) + u(y) - u(\lambda x + y)$ est nul.

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &= \langle \lambda u(x) + u(y) - u(\lambda x + y) | \lambda u(x) + u(y) - u(\lambda x + y) \rangle \\ &= \|\lambda u(x) + u(y)\|^2 - 2\langle \lambda u(x) + u(y) | u(\lambda x + y) \rangle + \|u(\lambda x + y)\|^2 \\ &= \lambda^2 \|u(x)\|^2 + 2\lambda \langle u(x) | u(y) \rangle + \|u(y)\|^2 - 2\lambda \langle u(x) | u(\lambda x + y) \rangle \\ &\quad - 2\langle u(y) | u(\lambda x + y) \rangle + k^2 \|\lambda x + y\|^2 \\ &= \lambda^2 k^2 \|x\|^2 + 2\lambda k^2 \langle x | y \rangle + k^2 \|y\|^2 - 2\lambda k^2 \langle x | \lambda x + y \rangle \\ &\quad - 2k^2 \langle y | \lambda x + y \rangle + k^2 \lambda^2 \|x\|^2 + 2k^2 \lambda \langle x | y \rangle + k^2 \|y\|^2 \\ &= k^2 (\lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x | y \rangle + \|y\|^2 - 2\lambda^2 \|x\|^2 - 2\lambda \langle x | y \rangle - 2\lambda \langle x | y \rangle \\ &\quad - 2\|y\|^2 + \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda \langle x | y \rangle + \|y\|^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'où $z = 0$ et par suite $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$, ce qui montre que $\boxed{u \text{ est un endomorphisme de } E}$.

On en déduit que $\boxed{u \text{ est une similitude de } E}$ en utilisant la question 18)