

A. Préliminaires sur les matrices symétriques

- 1) • $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $\text{Sp}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$.

On munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel : $(X, Y) \mapsto (X | Y) = X^\top Y$ et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

Selon le théorème spectral, il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $\Delta = Q^\top S Q = Q^{-1} S Q$ est diagonale. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de Δ . On notera $\Delta = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul.

$$X^\top S X = X^\top Q \Delta Q^\top X = (Q^\top X)^\top \Delta (Q^\top X)$$

Si on note $Q^\top X = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ on a alors

$$X^\top S X = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \geq \lambda_{i_0} y_{i_0}^2 > 0$$

où i_0 est tel que $y_{i_0} \neq 0$ (un tel i_0 existe car $X \neq 0$ et Q^\top est inversible). On en déduit que $X^\top S X > 0$.

- $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ ainsi $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, $X^\top S X > 0$

Soit λ une valeur propre de S . On considère X un vecteur colonne propre de S associé à λ . En particulier $X \neq 0$.

$$\text{On a } X^\top S X = X^\top (\lambda X) = \lambda X^\top X = \lambda \|X\|^2$$

ainsi $\lambda \|X\|^2 > 0$ or $\|X\|^2 > 0$ car $X \neq 0$ donc $\lambda > 0$

Enfinement $\boxed{S \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^\top S X > 0}$

- 2) Soit $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, il existe $Q \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $Q^\top S Q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+^*$ sont les valeurs propres de S comptées avec multiplicité.

On pose $R = Q \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) Q^\top$.

On a

$$R^\top R = Q \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) Q^\top Q \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) Q^\top = Q \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})^2 Q^\top = S$$

car $Q^\top Q = I_n$

De plus $R \in GL_n(\mathbb{R})$ car elle est semblable à $\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ dont 0 n'est pas valeur propre.

Ainsi $\boxed{\text{pour tout } S \in S_n^{++}(\mathbb{R}), \text{ il existe } R \in GL_n(\mathbb{R}) \text{ tel que } S = R^\top R}$

Réciproquement soit $R \in GL_n(\mathbb{R})$. Posons $S = R^\top R$.

On a $S^\top = R^\top (R^\top)^\top = R^\top R = S$ donc $R^\top R \in S_n(\mathbb{R})$

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul.

$$\text{On a } X^\top S X = (R X)^\top R X = \|R X\|^2$$

or $R \in GL_n(\mathbb{R})$ et $X \neq 0$, d'où $R X$ est non nul et ainsi $\|R X\| > 0$

$\boxed{\text{On a montré que pour tout } R \in GL_n(\mathbb{R}), R^\top R \in S_n^{++}(\mathbb{R})}$

3) Soit S et $T \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $t \in [0, 1]$. Montrons que $S_t = tS + (1-t)T \in S_n^+(\mathbb{R})$.

- On sait que $S_n(\mathbb{R})$ est convexe car c'est un sous espace vectoriel. Cela implique que $S_t \in S_n(\mathbb{R})$.
- Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

$$X^\top (tS + (1-t)T) X = tX^\top SX + (1-t)X^\top TX$$

Si $t \neq 0$, alors $X^\top (tS + (1-t)T) X \geq tX^\top SX > 0$

et si $t = 0$, alors $X^\top (tS + (1-t)T) X = (1-t)X^\top TX > 0$

Ainsi l'ensemble $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est convexe

B. Autres préliminaires

4) Posons $\Phi : (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}, a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i \in E$.

D'après l'énoncé $\text{Conv}(K) = \Phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$

Les applications notées : $\varphi_i : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $\varphi_i : (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \mapsto \lambda_i$ pour $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et $S : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $S : (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \mapsto \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k$ sont continues car linéaires sur un espace vectoriel de dimension finie.

$$\text{Or } \mathcal{H} = \left(\bigcap_{i=1}^{n+1} \varphi_i^{-1}(\mathbb{R}^+) \right) \cap S^{-1}(\{1\})$$

donc c'est un fermé de \mathbb{R}^{n+1} par intersection et car une image réciproque par une application continue d'un fermé est un fermé de l'ensemble de départ.

De plus \mathcal{H} est borné car $\mathcal{H} \subset [0, 1]^{n+1}$.

Ainsi \mathcal{H} est une partie compacte car elle est fermée et bornée et que \mathbb{R}^{n+1} est de dimension finie.

Par produit de compacts, $\mathcal{H} \times K^{n+1}$ est un compact.

Notons de plus que l'application Φ est continue car elle est bilinéaire.

On obtient que $\text{Conv}(K)$ est un sous-ensemble compact de E car l'image d'un compact par une application continue est compact.

5) Soit (e_1, \dots, e_n) base orthonormée de E .

Si $n = 1$, alors g est une homothétie de rapport noté λ et on a $\forall x \in E, \|g(x)\| = |\lambda| \|x\|$

Si $n > 1$. Soit alors $i \in \{2, \dots, n\}$.

On a $(e_1 + e_i | e_1 - e_i) = \|e_1\|^2 - \|e_i\|^2 = 0$ donc

$$0 = (g(e_1 + e_i) | g(e_1 - e_i)) = (g(e_1) + g(e_i) | g(e_1) - g(e_i)) = \|g(e_1)\|^2 - \|g(e_i)\|^2$$

On note $k = \|g(e_1)\| \geq 0$. Alors, pour tout i dans $\{1, 2, \dots, n\}$, $\|g(e_i)\|^2 = (g(e_i) | g(e_i)) = k^2$.

De plus, pour tout $i \neq j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $(g(e_i) | g(e_j)) = 0$ car $(e_i | e_j) = 0$

Soit $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ où les x_i sont réels.

On a

$$\|g(x)\|^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i g(e_i) \middle| \sum_{i=1}^n x_i g(e_i) \right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} x_i x_j (g(e_i) | g(e_j)) = \|g(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 k^2 = k^2 \|x\|^2$$

On a montré que il existe un nombre réel positif k tel que pour tout $x \in E$, $\|g(x)\| = k\|x\|$

Si $k = 0$ alors g est la composée de l'homothétie de rapport 0 et l'identité.

Si $k \neq 0$, alors g est la composée de l'homothétie de rapport k et de $\frac{1}{k}g$

or $\frac{1}{k}g \in \mathcal{L}(E)$ et $\frac{1}{k}g$ conserve la norme donc il s'agit d'un endomorphisme orthogonal.

Dans tous les cas, g est la composée d'une homothétie et d'un endomorphisme orthogonal

6) D'après le cours, on sait que $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe linéaire $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$.

Pour la compacité, il suffit d'établir le caractère fermé-borné car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension finie.

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. On a $A^T A = I_n$ donc $\|A\|_2 = \sqrt{(A|A)} = \sqrt{n}$ où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme euclidienne.

Ainsi $O_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

L'application $\psi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^T A$ est continue car chaque coefficient de $A^T A$ est polynomial en les coefficients de A .

Donc $O_n(\mathbb{R}) = \psi^{-1}(\{I_n\})$ est une partie fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

d'où le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact du groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$

C. Quelques propriétés de la compacité

7) Par l'absurde, on suppose qu'il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ convergente. On note ℓ sa limite.

Pour $\alpha = \frac{\varepsilon}{3}$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, $\|x_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \alpha$. En particulier

$$\varepsilon \leq \|x_{\varphi(N+1)} - x_{\varphi(N)}\| = \|x_{\varphi(N+1)} - \ell + \ell - x_{\varphi(N)}\| \leq \|x_{\varphi(N+1)} - \ell\| + \|x_{\varphi(N+1)} - \ell\| \leq 2\alpha$$

Cela implique que $\varepsilon \leq \frac{2\varepsilon}{3}$ ce qui est absurde.

Ainsi cette suite n'admet aucune suite extraite convergente

8) Par l'absurde, on suppose que la propriété à démontrer est fausse. Il existe donc un réel $\varepsilon > 0$

tel que pour tout entier $p > 0$ et tous éléments x_1, \dots, x_p de E , $K \not\subset \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon)$.

On va construire par récurrence une suite $(x_k)_{k \geq 1}$ à valeurs dans K telle que pour tout entier naturel $n \neq p$, on ait $\|x_p - x_n\| \geq \varepsilon$.

On considère un élément a_1 de E quelconque. D'après notre propriété, $K \not\subset B(a_1, \varepsilon)$. Donc il existe $x_1 \in K \setminus B(a_1, \varepsilon) \subset K$.

En utilisant encore la propriété, $K \not\subset B(x_1, \varepsilon)$. Donc il existe $x_2 \in K \setminus B(x_1, \varepsilon)$. En particulier $\|x_2 - x_1\| \geq \varepsilon$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

On suppose construits $x_1, \dots, x_k \in K$ tel que pour tout entier naturel $n \neq p \in \llbracket 1, k \rrbracket$, on ait $\|x_p - x_n\| \geq \varepsilon$

On a alors, grace a la propriété que $K \not\subseteq \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon) \neq \emptyset$.

Il existe donc $x_{k+1} \in K$ tel que pour tout entier naturel $n \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $\|x_{k+1} - x_n\| \geq \varepsilon$.

On a donc construit $x_1, \dots, x_{k+1} \in K$ tel que pour tout entier naturel $n \neq p \in \llbracket 1, k+1 \rrbracket$, on ait $\|x_p - x_n\| \geq \varepsilon$.

On construit ainsi une suite $(x_k)_{k \geq 1}$ d'éléments de K qui vérifie pour tout entiers naturels $n \neq p$, on a $\|x_p - x_n\| \geq \varepsilon$.

D'après la question 7) cette suite n'admet aucune suite extraite convergente. Or il s'agit d'une suite à valeurs dans le compact K , ce qui est absurde.

Ainsi pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier $p > 0$ et x_1, \dots, x_p éléments de E tels que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^p B(x_i, \varepsilon)$.

9) Par l'absurde, on suppose que pour tout réel $\alpha > 0$, il existe $x \in K$, tel que pour tout $i \in I$, on ait $B(x, \alpha) \not\subseteq \Omega_i$.

Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$, ceci nous fournit $x_n \in K$ tel que pour tout $i \in I$, on ait $B(x_n, 1/n) \not\subseteq \Omega_i$.

La suite (x_n) à valeurs dans le compact K admet une extractrice qui $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers une valeur d'adhérence $\ell \in K$.

Comme $K \subseteq \bigcup_{i \in I} \Omega_i$, ceci nous fournit $j \in I$ tel que $\ell \in \Omega_j$.

Comme Ω_j est un ouvert, ceci nous fournit $r > 0$ tel que $B(\ell, r) \subset \Omega_j$.

Comme $(x_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ , ceci nous fournit $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_1, \|x_{\varphi(n)} - \ell\| \leq r/3$

Comme $\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)$ converge vers 0, ceci nous fournit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_2, \frac{1}{\varphi(n)} \leq r/3$

On pose $p = \max(\varphi(N_1), \varphi(N_2))$

et comme $2r/3 < r$, on a d'après l'inégalité triangulaire : $B\left(x_p, \frac{1}{p}\right) \subset B(\ell, r)$

ce qui absurde par construction de de la suite (x_n) .

Ainsi il existe un réel noté $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in K$, il existe $i \in I$ tel que $B(x, \alpha)$ soit contenue dans l'ouvert Ω_i .

Lors de la question précédente, on pouvait obtenir de façon analogue l'existence d'un entier $p > 0$ et x_1, \dots, x_p éléments de K (*preuve identique que pour E*) tels que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^p B(x_j, \varepsilon)$

Pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, ce qui est fait au dessus nous fournit $i_j \in I$ tel que $B(x_j, \alpha) \subseteq \Omega_{i_j}$

d'où l'existence d'une sous-famille finie $(\Omega_{i_1}, \dots, \Omega_{i_p})$ de la famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ telle que $K \subseteq \bigcup_{k=1}^p \Omega_{i_k}$

10) Notons pour $i \in I$, $O_i = E \setminus F_i$ qui est un ouvert de E par complémentaire et on a $K \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$

D'après la question précédente il existe une sous famille finie $(O_{i_1}, \dots, O_{i_p})$ telle que $K \subseteq \bigcap_{k=1}^p O_{i_k}$.

On a donc $K \cap \left(\bigcap_{k=1}^p F_{i_k} \right) = \emptyset$

Comme pour tout $i \in I$, on a $F_i \subset K$: la sous famille finie $(F_{i_1}, \dots, F_{i_p})$ vérifie $\bigcap_{k=1}^p F_{i_k} = \emptyset$

D. Théorème du point fixe de Markov-Kakutani

11) Soit $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons : $\left\{ \begin{array}{l} (i) \quad N_G(x) \text{ existe dans } \mathbb{R}^+ \text{ (aspect bien défini et positivité)} \\ (ii) \quad N_G(x+y) \leq N_G(x) + N_G(y) \text{ (inégalité triangulaire)} \\ (iii) \quad N_G(\lambda x) = |\lambda| \cdot N_G(x) \text{ (homogénéité)} \\ (iv) \quad N_G(x) = 0 \implies x = 0 \text{ (caractère défini)} \end{array} \right.$

Pour (i) : L'application $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto u(x) \in E$ est linéaire et $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie, donc elle est continue.

Ainsi cette application est bornée sur le compact G

donc $\{\|u(x)\|, u \in G\}$ est une partie non vide (car $G \ni id_E$) et majorée de \mathbb{R}^+ d'où l'existence dans \mathbb{R}^+ de $N_G(x) = \sup_{u \in G} \|u(x)\|$.

Pour (ii) : Soit $u \in G$. On a : $\|u(x+y)\| = \|u(x) + u(y)\| \leq \|u(x)\| + \|u(y)\|$.
donc $\|u(x+y)\| \leq N_G(x) + N_G(y)$

Comme c'est vrai pour tout $u \in G$, on a bien $N_G(x+y) \leq N_G(x) + N_G(y)$

Pour (iii) : Si $\lambda = 0$, on a l'égalité car $N_G(\lambda x) = 0 = |\lambda| \cdot N_G(x)$

On suppose $\lambda \neq 0$.

Soit $u \in G$. On a $\|u(\lambda x)\| = |\lambda| \cdot \|u(x)\| \leq |\lambda| \cdot N_G(x)$

Comme c'est vrai pour tout u de G , on obtient : $N_G(\lambda x) \leq |\lambda| \cdot N_G(x)$

On applique cette inégalité au scalaire $1/\lambda$ et au vecteur λx : $N_G(x) \leq |1/\lambda| \cdot N_G(\lambda x)$

donc $N_G(\lambda x) \geq |\lambda| \cdot N_G(x)$

D'où l'égalité.

Pour (iv) : On suppose $N_G(x) = 0$.

Donc $\forall u \in G, \|u(x)\| = 0$ en particulier pour $u = id_E$ car G sous groupe de $GL(E)$.

donc $x = 0$

On a montré que N_G est bien définie et que c'est une norme sur E

12) • Soit $u \in G$ et $x \in E$.

L'application $v \mapsto v \circ u$ est une bijection du groupe G dans lui-même de bijection réciproque $v \mapsto v \circ u^{-1}$

donc $N_G(u(x)) = \sup_{v \in G} \|v \circ u(x)\| = \sup_{w \in G} \|w(x)\| = N_G(x)$.

Ainsi pour tous $u \in G$ et $x \in E, N_G(u(x)) = N_G(x)$

• Soit $x, y \in E$ tel que x est non nul.

– \Leftarrow On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\lambda x = y$.

Pour tout $u \in G$, on a $\|u(x+y)\| = (1+\lambda) \cdot \|u(x)\|$ car $1+\lambda \geq 0$

En faisant comme pour l'homogénéité, on obtient : $N_G(x+y) = (1+\lambda)N_G(x)$

donc $N_G(x+y) = N_G(x) + N_G(y)$ car $\lambda \geq 0$ et N_G est une norme

– $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que $N_G(x + y) = N_G(x) + N_G(y)$.

Le théorème des bornes atteintes avec l'application continue définie sur le compact non vide $G : u \mapsto \|u(x + y)\|$ nous fournit $v \in G$ tel que $N_G(x + y) = \|v(x + y)\|$

$$N_G(x) + N_G(y) = N_G(x + y) = \|v(x + y)\| = \|v(x) + v(y)\| \leq \|v(x)\| + \|v(y)\| \leq N_G(x) + N_G(y)$$

donc $v(x)$ et $v(y)$ sont colinéaires de même sens donc $x = v^{-1}(v(x))$ et $y = v^{-1}(v(y))$ également car v^{-1} est linéaire.

Finalement pour tous $x, y \in E$ avec x non nul,

$$\boxed{N_G(x + y) = N_G(x) + N_G(y) \text{ si et seulement si } \lambda x = y \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}^+}$$

13) Soit $x \in K$.

Comme K est stable par u , on montre par récurrence sur i que $u^i(x) \in K$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Ainsi x_n est le barycentre du système pondéré $((u^i(x), 1))_{0 \leq i \leq n-1}$ à coefficients positifs,

comme K est convexe, on a $x_n \in K$.

Ainsi comme K est compact :

$\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est à valeurs dans } K \text{ et admet une suite extraite convergente vers un élément } a \text{ de } K}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage, on a $\|u(x_n) - x_n\| = \frac{1}{n} \|u^n(x) - x\|$

donc $\boxed{\|u(x_n) - x_n\| \leq \frac{\delta(K)}{n}}$ car x et $u^n(x) \in K$

Notons φ une extractrice telle que $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers a

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\|u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)}\| \leq \frac{\delta(K)}{\varphi(n)}$ et de plus $\frac{\delta(K)}{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Comme l'application $y \mapsto u(y) - y$ est continue (linéaire et E est de dimension finie),

alors $(u(x_{\varphi(n)}) - x_{\varphi(n)})$ converge vers $u(a) - a$. Par passage aux limites dans les inégalités larges et continuité de la norme, $\|u(a) - a\| = 0$, ainsi $\boxed{\text{l'élément } a \text{ de } K \text{ est un point fixe de } u}$

14) Soit $x \in K$. Comme $u(x)$ est le barycentre de $((u_i(x), 1))_{1 \leq i \leq r}$ qui est une famille de points de K pondérés par des masses positives, alors $u(x) \in K$ car K convexe. Ainsi $\boxed{K \text{ est stable par } u}$

Comme $u \in \mathcal{L}(E)$, par combinaison linéaire,

on peut appliquer 13, pour en déduire : $\boxed{\text{l'existence de } a \in K \text{ tel que } u(a) = a}$

15) Comme $u(a) = a$, on a $N_G\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = N_G(u(a)) = N_G(a)$

et d'après le premier point de 12, on a $N_G(u_i(a)) = N_G(a)$ pour tout $1 \leq i \leq r$

d'où $\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a)) = \frac{r}{r} N_G(a)$. On a bien $\boxed{N_G\left(\frac{1}{r} \sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a))}$

Ainsi par homogénéité : $N_G\left(\sum_{i=1}^r u_i(a)\right) = \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a))$ car $r \geq 0$

Soit $j \in \{1, \dots, r\}$. Avec ce qui précède et en utilisant l'inégalité triangulaire pour N_G , on a :

$$N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_i(a)\right) \leq N_G(u_j(a)) + N_G\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_i(a)\right) \leq \sum_{i=1}^r N_G(u_i(a)) = N_G\left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_i(a)\right)$$

donc on a bien
$$N_G \left(u_j(a) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_i(a) \right) = N_G(u_j(a)) + N_G \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_i(a) \right)$$

16) Soit $j \in \{1, \dots, r\}$.

On suppose dans un premier temps que $u_j(a)$ est un vecteur non nul de E .

En appliquant le deuxième point de 12, à la question précédente, on obtient l'existence de $\lambda_j \geq 0$ tel que $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r u_i(a) = \lambda_j u_j(a)$. On en déduit que $ru(x) = \lambda_j u_j(a) + u_j(a)$ ce qui permet de conclure dans ce cas car $r > 0$.

Dans un deuxième temps, si $u_j(a)$ est le vecteur nul de E alors $a = 0$ car $u_j \in GL(E)$ et en prenant $\lambda_j = 1$ on a $u(a) = 0$ et $\frac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a) = 0$ car u et u_j linéaires

pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, on a l'existence d'un nombre réel $\lambda_j \geq 0$ tel que $u(a) = \frac{\lambda_j + 1}{r} u_j(a)$ dans tous les cas.

17) En prenant les images par N_G des deux membres de l'inégalité précédente on obtient pour tout $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$:

$$N_G(a) = \left| \frac{\lambda_j + 1}{r} \right| N_G(a) = \frac{\lambda_j + 1}{r} N_G(a)$$

donc si $a \neq 0_E$, on en déduit que $\lambda_j = r - 1$ et donc $a = u(a) = u_j(a)$.

Si $a = 0_E$, le résultat est évident.

Ainsi a est un point fixe de tous les endomorphismes u_i où $i \in \{1, \dots, r\}$

18) On note pour $u \in G$, $F_u = \{a \in K, u(a) = a\}$.

Comme pour $u \in G$, $u - \text{id}_E$ est continue (linéaire en dimension finie),

alors $F_u = (u - \text{id}_E)^{-1}(\{0\})$ est un fermé de K (image réciproque de fermé par une application continue)

Comme K est un fermé de E (car compact de E) et $F_u \subset K$, alors F_u est un fermé de E

Remarque : on aurait pu aussi remarquer que $F_u = K \cap \{a \in E, u(a) = a\}$

On suppose par l'absurde que : $\bigcap_{u \in G} F_u = \emptyset$, la question 10, nous fournit $p \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, \dots, u_p \in G$

tels que $\bigcap_{i=1}^p F_{u_i} = \emptyset$

Ceci est contradictoire avec la question précédente ainsi $\bigcap_{u \in G} F_u \neq \emptyset$.

Ce qui nous donne l'existence de $a \in \bigcap_{u \in G} F_u$.

Ainsi il existe bien $a \in K$ tel que pour tout $u \in G$, $u(a) = a$

E. Sous-groupes compacts de $GL_n(\mathbb{R})$

19) Soit $A \in G$. Montrons :
$$\begin{cases} (a) & \rho_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (b) & \rho_A \text{ linéaire} \\ (c) & \rho_A \text{ bijective} \end{cases}$$

Pour (a) C'est évident

Pour (b) On vérifie par calcul dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que :

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \rho_A(\lambda M + N) = \lambda \rho_A(M) + \rho_A(N)$$

Pour (c) Soit $B, C \in G$.

Par calcul dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a vérifié facilement que $\rho_B \circ \rho_C = \rho_{CB}$ car $B^\top C^\top = (CB)^\top$

On a également $\rho_{I_n} = \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et l'existence A^{-1} car $G \subset GL_n(\mathbb{R})$.

donc $\rho_A \circ \rho_{A^{-1}} = \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ et $\rho_{A^{-1}} \circ \rho_A = \text{id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

Ce qui prouve que ρ_A est bijective

On a montré que $\boxed{\rho_A \in GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$

L'application $\begin{cases} (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^2 & \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) \\ (A, B) & \mapsto (M \mapsto A^T M B) \end{cases}$ est bilinéaire (par bilinéarité du produit matriciel et linéarité de la transposition) donc continue car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie.

On en déduit que $\Lambda : A \mapsto \rho_A$ est continue de G vers $GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

Comme $H = \Lambda(G)$, alors H est un compact en tant qu'image d'un compact par une application continue.

Pour tous $A, B \in G$,

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rho_{AB}(M) = B^T A^T M A B = \rho_B(\rho_A(M))$$

donc $\rho_{AB} = \rho_B \circ \rho_A$.

Ainsi Λ est un morphisme de groupes de G muni de la loi $(A, B) \mapsto BA$ vers $GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, donc son image $\Lambda(G)$ est un sous-groupe de $GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

On a bien montré que $\boxed{H \text{ est un sous-groupe compact de } GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))}$

20) On a $G \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ donc en utilisant la réciproque de 2, on a $\Delta \subseteq S_n^{++}(\mathbb{R})$.

L'application notée $\Phi : A \in G \mapsto \rho_A(I_n) = A^\top A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est continue d'après l'énoncé ainsi $\Delta = \Phi(G)$ est compact car G l'est.

d'où $\boxed{\Delta \text{ est un compact contenu dans } S_n^{++}(\mathbb{R})}$

Il suffit d'établir que : $\begin{cases} (i) & K = \text{Conv}(\Delta) \text{ est compact (oui avec 4.)} \\ (ii) & K \subseteq S_n^{++}(\mathbb{R}) \\ (iii) & K \text{ stable par les éléments } H \end{cases}$

Pour (i) : D'après 3, $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui de plus contient Δ

Comme K est le plus petit convexe contenant Δ alors $K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Remarque : le plus petit convexe contenant une partie est bien défini car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est convexe et que l'intersection d'une famille de convexes est convexe.

Pour (iii) : Soit $M \in K$ et $\rho_A \in H$ où $A \in G$. Montrons $\rho_A(M) \in K$.

D'après ce qui est admis en introduction et comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2 , on peut

$$\text{écrire } M = \sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i B_i$$

$$\text{où } (B_1, \dots, B_{n^2+1}) \in \Delta^{n^2+1}, (\lambda_1, \dots, \lambda_{n^2+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n^2+1} \text{ et } \sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i = 1$$

Par linéarité de $\rho_A : \rho_A(M) = \sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i \rho_A(B_i)$

Pour $1 \leq i \leq n^2+1$, on peut écrire $B_i = (C_i)^\top C_i$ où $C_i \in G$, ainsi $\rho_A(B_i) = A^\top (C_i)^\top C_i A = (C_i A)^\top C_i A$

or $C_i A \in G$ car G est un groupe et donc $\rho_A(B_i) \in \Delta$

d'où $\rho_A(M) = \sum_{i=1}^{n^2+1} \lambda_i \rho_A(B_i) \in \text{Conv}(\Delta) = K$.

On a montré que

K est un sous-ensemble compact de $S_n^{++}(\mathbb{R})$ qui est stable par tous les éléments de H

- 21) Pour pouvoir appliquer le théorème du point fixe de Markov-Kakutani au convexe compact K de l'espace euclidien $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui est stable par tous élément du sous groupe compact H de $GL(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, il suffit d'établir que K est non vide. C'est bien la cas car comme $I_n \in G$, on a $\{I_n^\top I_n\} \subset \Delta \subset K$.

Le théorème nous fournit alors $a \in K$, tel que $\forall u \in H, u(a) = a$

ou encore : il existe $M \in K$ tel que pour tout $A \in G, \rho_A(M) = M$

Comme $M \in K \subset S_n^{++}(\mathbb{R})$, 2 nous fournit $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $M = N^\top N$.

Soit $A \in G$. On a alors $A^\top N^\top N A = N^\top N$ car $\rho_A(M) = M$.

Alors on a $(N A N^{-1})^\top N A N^{-1} = (N^{-1})^\top A^\top N^\top N A N^{-1} = (N^\top)^{-1} N^\top N N^{-1} = I_n$

On en déduit l'existence de $N \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $A \in G, N A N^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$

Considérons l'application $\psi_N : A \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto N A N^{-1} \in GL_n(\mathbb{R})$

On vérifie que ψ_N est un morphisme de groupes de $(GL_n(\mathbb{R}), \cdot)$ vers lui-même.

On note $G_1 = \psi_N(G)$ qui est donc un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ car G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$

Comme $\psi_N(G) \subset O_n(\mathbb{R})$ alors G_1 est un sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$. On remarque de plus que ψ_N est bijectif de bijection réciproque $\psi_{N^{-1}} : A \in GL_n(\mathbb{R}) \mapsto N^{-1} A N \in GL_n(\mathbb{R})$ donc $G = \psi_{N^{-1}}(G_1)$.

Enfinement il existe un sous-groupe G_1 de $O_n(\mathbb{R})$ tel que $G = N^{-1} G_1 N = \{N^{-1} B N / B \in G_1\}$

- 22) $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ est une symétrie car $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $g^2 = \text{id}_E$ car σ_P est une symétrie

On note A la matrice de σ_P dans la base canonique qui est orthonormée dans \mathbb{R}^n muni de sa structure euclidienne usuelle et donc $A \in O_n(\mathbb{R}) \subset K$ Ainsi $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ admet comme matrice dans cette base $N A N^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ donc c'est un endomorphisme orthogonal de \mathbb{R}^n d'où $g \circ \sigma_P \circ g^{-1}$ est une symétrie orthogonale. De plus $\forall x \in E, g \circ \sigma_P \circ g^{-1}(x) = x \Leftrightarrow$

$\sigma_P(g^{-1}(x)) = g^{-1}(x) \Leftrightarrow g^{-1}(x) \in P \Leftrightarrow x \in g(P)$. On en déduit que $g \circ \sigma_P \circ g^{-1} = \sigma_{g(P)}$.

Soit $x \perp y$ dans E . Si $x \neq 0$. Alors $y \in Q = \{x\}^\perp$, hyperplan de E et $g \circ \sigma_Q \circ g^{-1} = \sigma_{g(Q)}$

alors $\sigma_{g(Q)}(g(x)) = g \circ \sigma_Q(x) = -g(x)$ donc $g(x) \in g(Q)^\perp$ or $g(y) \in g(Q)$ donc $g(x) \perp g(y)$ (encore vrai pour $x = 0$)

Ainsi g conserve l'orthogonalité et 5 nous fournit $k \geq 0$ tel que $N = k\Omega$ où $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$, et $k \neq 0$ car $N \neq 0$ car $N \in GL_n(\mathbb{R})$ et $n > 0$.

donc Ω est tel que $\Omega K \Omega^{-1} \subseteq O_n(\mathbb{R})$. 21 nous fournit G_1 sous groupe de $O_n(\mathbb{R})$ tel que $K = \Omega^{-1} G_1 \Omega \subset O_n(\mathbb{R})$

on en déduit $K = O_n(\mathbb{R})$