Chapitre 5 : Automates

Option Informatique – MP

Lycée Chateaubriand

Table des matières

Le théorème de Kleene

Nous allons maintenant faire le lien entre les langages rationnels (réguliers) et les automates finis.

Théorème 1 (Théorème de Kleene)

Tout langage rationnel est reconnaissable.

Remarques

- Cela signifie que si L est rationnel, il existe un automate fini (que l'on peut supposer déterministe par déterminisation) A tel que pour tout mot w de $\mathscr{A}^*$, $w \in L$ si et seulement si w est reconnu par A.

Remarques

- Cela signifie que si L est rationnel, il existe un automate fini (que l'on peut supposer déterministe par déterminisation) A tel que pour tout mot w de $\mathscr{A}^*$, $w \in L$ si et seulement si w est reconnu par A.

- La réciproque est aussi vraie (tout langage reconnaissable par un automate est régulier) mais elle n'est pas au programme.

Remarques

- Cela signifie que si L est rationnel, il existe un automate fini (que l'on peut supposer déterministe par déterminisation) A tel que pour tout mot w de $\mathscr{A}^*$, $w \in L$ si et seulement si w est reconnu par A.

- La réciproque est aussi vraie (tout langage reconnaissable par un automate est régulier) mais elle n'est pas au programme.

- La méthode de démonstration est constructive : on va construire une automate (automate de Glushkov) qui reconnait un langage régulier donné.

Exemple

Avant de se lancer dans la démonstration qui est longue, voyons que ce théorème permettra de montrer que des langages ne sont pas rationnels.

L'argument principal est qu'un automate reconnaissant un langage n'aura qu'un nombre fini d'états.

Exemple

Prenons par exemple le langage $L = \{a^p b^p \mid p \in \mathbb{N}\}$. Montrons qu'il n'est pas rationnel.

Nous allons donner deux rédactions plus ou moins équivalentes.

Exemple

Rédaction 1 :

Supposons qu'il est reconnu par un automate déterministe $A = (Q, q_0, F, \delta)$. On sait que l'on peut alors supposer cet automate complet.

Cet automate a un nombre fini d'état.

Il existe donc $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ avec $n < p$ tels que $q = \delta(q_0, a^n) = \delta(q_0, a^p)$.

On en déduit que $\delta(q_0, a^p b^n) = \delta(q, b^n) = \delta(q_0, a^n b^n) \in F$. Cela implique que $a^p b^n$ est reconnu par l'automate ce qui est absurde.

Exemple

Rédaction 2 :

Soit $A = (Q, q_0, F, \delta)$ un automate déterministe reconnaissant le langage L que l'on peut, là encore, supposer complet.

On note, pour tout entier naturel n, $q_n = \delta(q_0, a^n)$.

Les états q_n sont deux à deux distincts car pour $n \neq n'$, $\delta(q_n, b^n) \in F$ et $\delta(q_{n'}, b^n) \notin F$.

L'automate a une infinité d'états. C'est absurde.

Remarque

On reformulera ceci à la fin du chapitre avec le lemme de l'étoile.

Exercice

Montrer que le langage des palindromes sur $\mathscr{A} = \{a, b\}$ n'est pas rationnel.

Exercice

Montrer que le langage des palindromes sur $\mathscr{A} = \{a, b\}$ n'est pas rationnel.

Soit $A = (Q, q_0, F, \delta)$ un automate déterministe reconnaissant le langage L que l'on peut, là encore, supposer complet.

On note $q_n = \delta(q_0, a^n b)$.

Ils sont deux à deux distincts car pour $n \neq n'$, $\delta(q_n, a^n) \in F$ et $\delta(q_{n'}, a^n) \notin F$.

L'automate a une infinité d'états. C'est absurde.

Définition

Nous aurons besoin par la suite d'une sous-classe de langages : les langages *locaux*. Ce sont les langages qui sont tels que l'on puisse déterminer si un mot w appartient au langage juste en regardant, la première lettre, la dernière lettre et les facteurs de longueurs 2 (d'où le caractère local).

Définition

Définition 1

Soit L un langage sur un alphabet $\mathscr{A}$. On définit :

- $P(L) = \{a \in \mathscr{A} \mid a\mathscr{A}^\star \cap L \neq \emptyset\}$ *l'ensembles des lettres qui apparaissent en tête d'un mot de L (les préfixes)*

Définition

Définition 1

Soit L un langage sur un alphabet $\mathscr{A}$. On définit :

- $P(L) = \{a \in \mathscr{A} \mid a\mathscr{A}^\star \cap L \neq \emptyset\}$ *l'ensembles des lettres qui apparaissent en tête d'un mot de L (les préfixes)*
- $S(L) = \{a \in \mathscr{A} \mid \mathscr{A}^\star a \cap L \neq \emptyset\}$ *l'ensembles des lettres qui apparaissent en fin d'un mot de L (les suffixes)*

Définition

Définition 1

Soit L un langage sur un alphabet $\mathscr{A}$. On définit :

- $P(L) = \{a \in \mathscr{A} \mid a\mathscr{A}^\star \cap L \neq \emptyset\}$ *l'ensembles des lettres qui apparaissent en tête d'un mot de L (les préfixes)*
- $S(L) = \{a \in \mathscr{A} \mid \mathscr{A}^\star a \cap L \neq \emptyset\}$ *l'ensembles des lettres qui apparaissent en fin d'un mot de L (les suffixes)*
- $F(L) = \{u \in \mathscr{A}^2 \mid \mathscr{A}^\star u\mathscr{A}^\star \cap L \neq \emptyset\}$ *l'ensembles des facteurs de longueur 2 d'un mot de L*

Définition

Définition 1

Soit L un langage sur un alphabet $\mathscr{A}$. On définit :

- $P(L) = \{a \in \mathscr{A} \mid a\mathscr{A}^\star \cap L \neq \emptyset\}$ *l'ensembles des lettres qui apparaissent en tête d'un mot de L (les préfixes)*
- $S(L) = \{a \in \mathscr{A} \mid \mathscr{A}^\star a \cap L \neq \emptyset\}$ *l'ensembles des lettres qui apparaissent en fin d'un mot de L (les suffixes)*
- $F(L) = \{u \in \mathscr{A}^2 \mid \mathscr{A}^\star u\mathscr{A}^\star \cap L \neq \emptyset\}$ *l'ensembles des facteurs de longueur 2 d'un mot de L*
- $N(L) = \mathscr{A}^2 \setminus F(L)$ *les mots de longueur 2 qui ne sont des facteurs d'aucun mot de L*

Théorème 2

Soit L un langage,

$$L \setminus \{\varepsilon\} \subset (P(L)\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S(L)) \setminus \mathscr{A}^\star N(L)\mathscr{A}^\star$$

Théorème 2

Soit L un langage,

$$L \setminus \{\varepsilon\} \subset (P(L)\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S(L)) \setminus \mathscr{A}^\star N(L)\mathscr{A}^\star$$

Démonstration : Par définition.

Définition

Attention

Pour $P \subset \mathscr{A}$, $S \subset \mathscr{A}$, $F \subset \mathscr{A}^2$ et $N = \mathscr{A}^2 \setminus F$, on n'a pas

$$(P\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S) \setminus \mathscr{A}^\star N \mathscr{A}^\star = (P\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S) \cap \mathscr{A}^\star F \mathscr{A}^\star$$

Attention

Pour $P \subset \mathscr{A}$, $S \subset \mathscr{A}$, $F \subset \mathscr{A}^2$ et $N = \mathscr{A}^2 \setminus F$, on n'a pas

$$(P\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S) \setminus \mathscr{A}^\star N \mathscr{A}^\star = (P\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S) \cap \mathscr{A}^\star F \mathscr{A}^\star$$

- Par exemple pour $P = S = \{a\}$ et $F = \{aa\}$. On a $N = \{ab, ba, bb\}$.
- Le mot $aaba$ appartient au langage de droite mais pas à celui de gauche.

Définition

Définition 2

Soit L un langage, il est dit ***local*** *s'il existe des parties P et S de $\mathscr{A}$ et une partie N de $\mathscr{A}^2$ telles que*

$$L \setminus \{\varepsilon\} = (P\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S) \setminus \mathscr{A}^\star N \mathscr{A}^\star$$

Remarques

- Si L est un langage local, nécessairement $P = P(L), S = S(L)$ et $N = N(L)$.

Remarques

- Si L est un langage local, nécessairement $P = P(L), S = S(L)$ et $N = N(L)$.
- On préfère souvent définir le langage par le triplet (P, S, F) plutôt que (P, S, N), c'est-à-dire avec les facteurs que l'on accepte plutôt que ceux que l'on refuse.

Exemple 1

Le langage $L = \{a^n b^m \mid (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$ est un langage local.

Exemple 1

Le langage $L = \{a^n b^m \mid (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$ est un langage local.

- On prend $P = \{a, b\}$ et $S = \{a, b\}$

Exemple 1

Le langage $L = \{a^n b^m \mid (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$ est un langage local.

- On prend $P = \{a, b\}$ et $S = \{a, b\}$
- On prend $F = \{aa, ab, bb\}$ et donc $N = \{ba\}$.

Exemple 1

Le langage $L = \{a^n b^m \mid (n, m) \in \mathbb{N}^2\}$ est un langage local.

- On prend $P = \{a, b\}$ et $S = \{a, b\}$
- On prend $F = \{aa, ab, bb\}$ et donc $N = \{ba\}$.

On a bien $L \setminus \{\varepsilon\} = (P\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S) \setminus \mathscr{A}^\star N \mathscr{A}^\star$ puisqu'un mot w appartient à L si et seulement si :

$$\forall i < |w|, w_i = b \Rightarrow w_{i+k} = b \text{ pour } k > 0$$

Exemple 2

Le langage $L = (ab)\mathscr{A}^\star$ des mots qui commencent par ab n'est pas local.

Exemple 2

Le langage $L = (ab)\mathscr{A}^\star$ des mots qui commencent par ab n'est pas local.

S'il l'était on aurait

- $P = \{a\}$ et $S = \{a, b\}$

Exemple 2

Le langage $L = (ab)\mathscr{A}^\star$ des mots qui commencent par ab n'est pas local.

S'il l'était on aurait

- $P = \{a\}$ et $S = \{a, b\}$
- $F = \{aa, ab, bb, ba\}$ et donc $N = \emptyset$.

Exemple 2

Le langage $L = (ab)\mathscr{A}^\star$ des mots qui commencent par ab n'est pas local.

S'il l'était on aurait

- $P = \{a\}$ et $S = \{a, b\}$
- $F = \{aa, ab, bb, ba\}$ et donc $N = \emptyset$.

On a alors $(P\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S) \setminus \mathscr{A}^\star N\mathscr{A}^\star$ qui est le langage des mots qui commencent par a. Ce n'est pas L.

Propriétés de clôture

On veut savoir si l'ensemble des langages locaux est stable par les opérations ensemblistes sur les langages : intersection, union, concaténation et étoile.

Intersection

Théorème 3

L'intersection de deux langages locaux est un langage local.

Théorème 3

L'intersection de deux langages locaux est un langage local.

Démonstration : Soit L_1 et L_2 deux langages locaux. On note pour $i \in \{1, 2\}$ P_i, S_i et N_i les préfixes, suffixes et facteurs interdits de L_i. Soit $w \in \mathscr{A}^\star$

$$\begin{aligned}
w \in L_1 \cap L_2 \setminus \{\varepsilon\} &\iff w \in (L_1 \setminus \{\varepsilon\}) \cap (L_2 \setminus \{\varepsilon\}) \\
&\iff w \in (P_1\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S_1) \cap (P_2\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S_2) \\
&\qquad \text{et } w \notin \mathscr{A}^\star N_1 \mathscr{A}^\star \text{ et } w \notin \mathscr{A}^\star N_2 \mathscr{A}^\star \\
&\iff w \in (P_1 \cap P_2)\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star (S_1 \cap S_2) \\
&\qquad \text{et } w \notin \mathscr{A}^\star (N_1 \cup N_2) \mathscr{A}^\star
\end{aligned}$$

Intersection

Finalement,

$$L_1 \cap L_2 \setminus \{\varepsilon\} = (P\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S) \setminus \mathscr{A}^\star N \mathscr{A}^\star$$

où $P = P_1 \cap P_2, S = S_1 \cap S_2$ et $N = N_1 \cup N_2$ (et donc $F = \overline{N} = F_1 \cap F_2$).

Le langage $L_1 \cap L_2$ est bien local.

Union et concatenation

Passons au cas de l'union et de la concaténation. Ce n'est pas aussi simple.

Exercice : Montrer que les langages $L_1 = L(a\star)$ et $L_2 = L((ab)\star)$ sont locaux mais que ni $L_1 L_2$ ni $L_1 \cup L_2$ ne le sont

Exercice

- Le langage L_1 est local. On pose $P_1 = \{a\}, S_1 = \{a\}$ et $F_1 = \{aa\}$ donc $N_1 = \{ab, ba, bb\}$.
  Dans ce cas,
  $$L_1 \setminus \{\varepsilon\} = (P_1\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star \cap S_1) \setminus \mathscr{A}^\star N_1 \mathscr{A}^\star$$

Exercice

- Le langage L_1 est local. On pose $P_1 = \{a\}, S_1 = \{a\}$ et $F_1 = \{aa\}$ donc $N_1 = \{ab, ba, bb\}$.
  Dans ce cas,
  $$L_1 \setminus \{\varepsilon\} = (P_1\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star \cap S_1) \setminus \mathscr{A}^\star N_1 \mathscr{A}^\star$$

- Le langage L_2 est local. On pose $P_2 = \{a\}, S_1 = \{b\}$ et $F_1 = \{ab, ba\}$ donc $N_1 = \{aa, bb\}$.
  Dans ce cas,
  $$L_2 \setminus \{\varepsilon\} = (P_2\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star \cap S_2) \setminus \mathscr{A}^\star N_2 \mathscr{A}^\star$$

Exercice

- Le langage $L_1 \cup L_2 =$ n'est local. En effet
  $P(L_1 \cup L_2) = \{a\}, S(L_1 \cup L_2) = \{a, b\}$ et $F(L_1 \cup L_2) = \{aa, ab, ba\}$ donc
  $N(L_1 \cup L_2) = \{bb\}$.

Exercice

- Le langage $L_1 \cup L_2 =$ n'est local. En effet
  $P(L_1 \cup L_2) = \{a\}, S(L_1 \cup L_2) = \{a, b\}$ et $F(L_1 \cup L_2) = \{aa, ab, ba\}$ donc
  $N(L_1 \cup L_2) = \{bb\}$.
  On a alors $aab \in (P(L_1 \cup L_2)\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S(L_1 \cup L_2)) \setminus \mathscr{A}^\star N(L_1 \cup L_2)\mathscr{A}^\star$ mais pour autant $aab \notin L_1 \cup L_2$.

Exercice

- Le langage $L_1 \cup L_2 =$ n'est local. En effet
  $P(L_1 \cup L_2) = \{a\}, S(L_1 \cup L_2) = \{a, b\}$ et $F(L_1 \cup L_2) = \{aa, ab, ba\}$ donc
  $N(L_1 \cup L_2) = \{bb\}$.
  On a alors $aab \in (P(L_1 \cup L_2)\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S(L_1 \cup L_2)) \setminus \mathscr{A}^\star N(L_1 \cup L_2)\mathscr{A}^\star$ mais pour autant $aab \notin L_1 \cup L_2$.

- Le langage $L_1 L_2$ n'est pas local. En effet $P(L_1 L_2) = \{a\}, S(L_1 L_2) = \{a, b\}$ et $F(L_1 L_2) = \{aa, ab, ba\}$ donc $N(L_1 L_2) = \{bb\}$.

Exercice

- Le langage $L_1 \cup L_2 =$ n'est local. En effet
  $P(L_1 \cup L_2) = \{a\}, S(L_1 \cup L_2) = \{a, b\}$ et $F(L_1 \cup L_2) = \{aa, ab, ba\}$ donc
  $N(L_1 \cup L_2) = \{bb\}$.
  On a alors $aab \in (P(L_1 \cup L_2)\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S(L_1 \cup L_2)) \setminus \mathscr{A}^\star N(L_1 \cup L_2)\mathscr{A}^\star$ mais pour autant $aab \notin L_1 \cup L_2$.

- Le langage $L_1 L_2$ n'est pas local. En effet $P(L_1 L_2) = \{a\}, S(L_1 L_2) = \{a, b\}$ et $F(L_1 L_2) = \{aa, ab, ba\}$ donc $N(L_1 L_2) = \{bb\}$.
  On a alors $aba \in (P(L_1 L_2)\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S(L_1 L_2)) \setminus \mathscr{A}^\star N(L_1 L_2)\mathscr{A}^\star$ mais pour autant $aba \notin L_1 L_2$.

Union et concaténation

Théorème 4

Soit L_1 et L_2 deux langages locaux **sur des alphabets disjoints** alors $L_1 \cup L_2$ et $L_1.L_2$ sont des langages locaux.

Démonstration

On note comme d'habitude, pour $i \in \{1, 2\}$ P_i, S_i et F_i les préfixes, suffixes et facteurs autorisés de L_i. On note $\mathscr{A}_1$ (resp. $\mathscr{A}_2$) l'alphabet sur lequel est défini L_1 (resp. L_2) ainsi que $\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$.

On veut montrer que le langage $L_1 \cup L_2$ sur l'alphabet $\mathscr{A}$ est local. On pose $P = P(L_1 \cup L_2) = P_1 \cup P_2$, $S = S(L_1 \cup L_2) = S_1 \cup S_2$ et $F = F(L_1 \cup F_2) = F_1 \cup F_2$.

On veut montrer que

$$L_1 \cup L_2 \setminus \{\varepsilon\} = (P\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S) \setminus \mathscr{A}^\star N \mathscr{A}^\star$$

où $N = (\mathscr{A})^2 \setminus F$.

Démonstration

Si on considère un mot $w = w_1 \dots w_n \in (P\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S) \setminus \mathscr{A}^\star N \mathscr{A}^\star$ alors $w_1 \in P = P_1 \cup P_2$.

Supposons (par symétrie) que $w_1 \in P_1 \subset \mathscr{A}_1$.

Maintenant, $w_1 w_2 \in F = F_1 \cup F_2$ mais comme $w_1 \in \mathscr{A}_1$ et que L_1 et L_2 sont définis sur des alphabets distincts, nécessairement $w_1 w_2 \in F_1$ et donc $w_2 \in \mathscr{A}_1$. On montre ainsi, de proche en proche, que $w \in \mathscr{A}_1^\star$. Il appartient alors à $(P_1 \mathscr{A}_1^\star \cap \mathscr{A}_1^\star S_1) \setminus \mathscr{A}_1^\star N_1 \mathscr{A}_1^\star = L_1 \setminus \{\varepsilon\}$ car L_1 est local.

Gardons les mêmes notations. On pose cette fois

$$P = P(L_1.L_2) = \begin{cases} P_1 & \text{si } \varepsilon \notin L_1 \\ P_1 \cup P_2 & \text{si } \varepsilon \in L_1 \end{cases}$$

De même on pose

$$S = S(L_1.L_2) = \begin{cases} S_2 & \text{si } \varepsilon \notin L_2 \\ S_1 \cup S_2 & \text{si } \varepsilon \in L_2 \end{cases}$$

Pour finir, on pose

$$F = F(L_1.L_2) = F_1 \cup F_2 \cup S_1 \times P_2$$

Démonstration

On procède alors de même soit $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in (P\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S) \setminus \mathscr{A}^\star N \mathscr{A}^\star$.

Démonstration

On procède alors de même soit $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in (P\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S) \setminus \mathscr{A}^\star N \mathscr{A}^\star$.

- Si $w \in \mathscr{A}_2^\star$ alors $w_1 \in P_2$ (c'est donc que $\varepsilon \in L_1$). On a aussi $w_n \in S_2$ et tous les facteurs sont dans F_2 donc $w \in L_2 \subset L_1.L_2$ car $\varepsilon \in L_1$.

Démonstration

On procède alors de même soit $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in (P\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S) \setminus \mathscr{A}^\star N \mathscr{A}^\star$.

- Si $w \in \mathscr{A}_2^\star$ alors $w_1 \in P_2$ (c'est donc que $\varepsilon \in L_1$). On a aussi $w_n \in S_2$ et tous les facteurs sont dans F_2 donc $w \in L_2 \subset L_1.L_2$ car $\varepsilon \in L_1$.
- Si $w \in \mathscr{A}_1^\star$ on procède de même (cette fois $\varepsilon \in L_2$).

- Si $w \notin (\mathscr{A}_1^\star \cup \mathscr{A}_2^\star)$. On a alors $w_1 \in P_1$ et $w_n \in S_2$ car si une lettre w_k appartient à $\mathscr{A}_2$ toutes celles qui suivent aussi d'après la forme des facteurs autorisés. On note $u = w_1 \cdots w_p$ le plus grand préfixe appartenant à $\mathscr{A}_1^\star$. On a alors $w_p \in \mathscr{A}_1$ et $w_{p+1} \in \mathscr{A}_2$ donc le facteur $w_p w_{p+1} \in S_1 \times P_2$. On montre alors que $u \in L_1$ et $w_{p+1} \cdots w_n \in L_2$.

Dans tous les cas, $w \in L_1.L_2$.

Théorème 5

Soit L un langage local, le langage $L^\star$ est encore un langage local.

Démonstration : Si on pose encore $P = P(L), S = S(L)$ et $F = F(L)$.

On voit que $P(L^\star) = P$, $S(L^\star) = S$ et $F(L^\star) = F \cup S \times P$.

Comme précédemment, on peut montrer par récurrence sur la longueur du mot que si $w \in (P(L^\star)\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S(L^\star)) \setminus \mathscr{A}^\star N(L^\star)\mathscr{A}^\star$ alors $w \in L^\star$. L'idée est de « couper » le mot $w = w_1 \cdots w_n$ dès que l'on voit un facteur $w_p w_{p+1} \in S \times P$. Dans ce cas, $w_1 \cdots w_p \in L$ et on recommence avec le suffixe $w_{p+1} \cdots w_n$.

Définition 3 (Expressions rationnelles linéaires)

Une expression rationnelle est dite linéaire si toute lettre de l'alphabet apparait au plus une fois

Exemples : Les expressions $(a|b)\star$, $a\star|b$ sont linéaires. L'expression $a\star|ba$ ne l'est pas.

Langage associé

Théorème 6

Le langage associé a une expression régulière linéaire est local.

Théorème 6

Le langage associé a une expression régulière linéaire est local.

Démonstration : Cela se démontre par récurrence sur la longueur de l'expression e ou par induction structurelle.

- si $e = \emptyset$, $L(e) = \emptyset$ qui est local. On prend $N = \mathscr{A}^2$, $P = S = \emptyset$.

Démonstration

- si $e = \emptyset$, $L(e) = \emptyset$ qui est local. On prend $N = \mathscr{A}^2$, $P = S = \emptyset$.
- si $e = \varepsilon$, $L(e) = \{\varepsilon\}$ qui est local. On prend $N = \mathscr{A}^2$, $P = S = \emptyset$.

Démonstration

- si $e = \emptyset$, $L(e) = \emptyset$ qui est local. On prend $N = \mathscr{A}^2$, $P = S = \emptyset$.
- si $e = \varepsilon$, $L(e) = \{\varepsilon\}$ qui est local. On prend $N = \mathscr{A}^2$, $P = S = \emptyset$.
- si $e = a$ avec $a \in \mathscr{A}$, $L(e) = \{a\}$ qui est local défini par $P = \{a\} S = \{a\}$ et $N = \mathscr{A}^2$

Démonstration

- si $e = \emptyset$, $L(e) = \emptyset$ qui est local. On prend $N = \mathscr{A}^2$, $P = S = \emptyset$.
- si $e = \varepsilon$, $L(e) = \{\varepsilon\}$ qui est local. On prend $N = \mathscr{A}^2$, $P = S = \emptyset$.
- si $e = a$ avec $a \in \mathscr{A}$, $L(e) = \{a\}$ qui est local défini par $P = \{a\} S = \{a\}$ et $N = \mathscr{A}^2$
- si $e = e_1|e_2$ alors $L(e) = L(e_1) \cup L(e_2)$. Par hypothèse de récurrence, $L(e_1)$ et $L(e_2)$ sont des langages locaux construits sur des alphabets disjoints (car e est linéaire). Alors $L(e_1) \cup L(e_2)$ est local d'après ce qui précède.

Démonstration

- si $e = \emptyset$, $L(e) = \emptyset$ qui est local. On prend $N = \mathscr{A}^2$, $P = S = \emptyset$.
- si $e = \varepsilon$, $L(e) = \{\varepsilon\}$ qui est local. On prend $N = \mathscr{A}^2$, $P = S = \emptyset$.
- si $e = a$ avec $a \in \mathscr{A}$, $L(e) = \{a\}$ qui est local défini par $P = \{a\} S = \{a\}$ et $N = \mathscr{A}^2$
- si $e = e_1|e_2$ alors $L(e) = L(e_1) \cup L(e_2)$. Par hypothèse de récurrence, $L(e_1)$ et $L(e_2)$ sont des langages locaux construits sur des alphabets disjoints (car e est linéaire). Alors $L(e_1) \cup L(e_2)$ est local d'après ce qui précède.
- si $e = e_1 e_2$ alors $L(e) = L(e_1)L(e_2)$. Par hypothèse de récurrence, $L(e_1)$ et $L(e_2)$ sont des langages locaux construits sur des alphabets disjoints (car e est linéaire). Là encore, $L(e_1)L(e_2)$ est local.

Démonstration

- si $e = \emptyset$, $L(e) = \emptyset$ qui est local. On prend $N = \mathscr{A}^2$, $P = S = \emptyset$.
- si $e = \varepsilon$, $L(e) = \{\varepsilon\}$ qui est local. On prend $N = \mathscr{A}^2$, $P = S = \emptyset$.
- si $e = a$ avec $a \in \mathscr{A}$, $L(e) = \{a\}$ qui est local défini par $P = \{a\} S = \{a\}$ et $N = \mathscr{A}^2$
- si $e = e_1|e_2$ alors $L(e) = L(e_1) \cup L(e_2)$. Par hypothèse de récurrence, $L(e_1)$ et $L(e_2)$ sont des langages locaux construits sur des alphabets disjoints (car e est linéaire). Alors $L(e_1) \cup L(e_2)$ est local d'après ce qui précède.
- si $e = e_1 e_2$ alors $L(e) = L(e_1)L(e_2)$. Par hypothèse de récurrence, $L(e_1)$ et $L(e_2)$ sont des langages locaux construits sur des alphabets disjoints (car e est linéaire). Là encore, $L(e_1)L(e_2)$ est local.
- Si $e = e_1\star$. Alors $L(e_1)$ est local et donc $L(e)$ aussi.

Remarque

La réciproque n'est pas vraie. Par exemple le langage $aa\star$ est un langage local ($P = \{a\}, S = \{\varepsilon\}, F = \{aa\}$) mais il n'est pas associé à une expression linéaire.

Méthode

Il faut savoir calculer explicitement les paramètres P, S, F associés à un langage défini par une expression linéaire. Cela se fait par induction. On garde un marqueur λ defini par $\lambda(e) = V$ si $\varepsilon \in L(e)$ et $\lambda(e) = F$ sinon. On a alors les formules suivantes

e	$\lambda(e)$	$P(e)$	$S(e)$	$F(e)$
$\emptyset$				

Méthode

Il faut savoir calculer explicitement les paramètres P, S, F associés à un langage défini par une expression linéaire. Cela se fait par induction. On garde un marqueur λ defini par $\lambda(e) = V$ si $\varepsilon \in L(e)$ et $\lambda(e) = F$ sinon. On a alors les formules suivantes

e	$\lambda(e)$	$P(e)$	$S(e)$	$F(e)$
$\emptyset$	F	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{\varepsilon\}$				

Il faut savoir calculer explicitement les paramètres P, S, F associés à un langage défini par une expression linéaire. Cela se fait par induction. On garde un marqueur λ defini par $\lambda(e) = V$ si $\varepsilon \in L(e)$ et $\lambda(e) = F$ sinon. On a alors les formules suivantes

e	$\lambda(e)$	$P(e)$	$S(e)$	$F(e)$
$\emptyset$	F	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{\varepsilon\}$	V	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
a				

Il faut savoir calculer explicitement les paramètres P, S, F associés à un langage défini par une expression linéaire. Cela se fait par induction. On garde un marqueur λ defini par $\lambda(e) = V$ si $\varepsilon \in L(e)$ et $\lambda(e) = F$ sinon. On a alors les formules suivantes

e	$\lambda(e)$	$P(e)$	$S(e)$	$F(e)$
$\emptyset$	F	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{\varepsilon\}$	V	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
a	F	$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$
$f\star$				

Méthode

Il faut savoir calculer explicitement les paramètres P, S, F associés à un langage défini par une expression linéaire. Cela se fait par induction. On garde un marqueur λ defini par $\lambda(e) = V$ si $\varepsilon \in L(e)$ et $\lambda(e) = F$ sinon. On a alors les formules suivantes

e	$\lambda(e)$	$P(e)$	$S(e)$	$F(e)$
$\emptyset$	F	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{\varepsilon\}$	V	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
a	F	$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$
$f\star$	V	P	S	$F \cup S \times P$
$e_1 \vert e_2$				

Méthode

Il faut savoir calculer explicitement les paramètres P, S, F associés à un langage défini par une expression linéaire. Cela se fait par induction. On garde un marqueur λ defini par $\lambda(e) = V$ si $\varepsilon \in L(e)$ et $\lambda(e) = F$ sinon. On a alors les formules suivantes

e	$\lambda(e)$	$P(e)$	$S(e)$	$F(e)$
$\emptyset$	F	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
$\{\varepsilon\}$	V	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
a	F	$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$
$f\star$	V	P	S	$F \cup S \times P$
$e_1 \vert e_2$	$\lambda(e_1) \vert\vert \lambda(e_2)$	$P(e_1) \cup P(e_2)$	$S(e_1) \cup S(e_2)$	$F(e_1) \cup F(e_2)$

Pour $e_1\,e_2$ c'est un peu plus compliqué. On a :

- $\lambda(e_1\,e_2) = \lambda(e_1)\&\&\lambda(e_2)$

Pour $e_1\,e_2$ c'est un peu plus compliqué. On a :

- $\lambda(e_1\,e_2) = \lambda(e_1)\&\&\lambda(e_2)$
- $P(e_1\,e_2) = \begin{cases} P(e_1) & \text{si } \lambda(e_1) = F \\ P(e_1) \cup P(e_2) & \text{si } \lambda(e_1) = V \end{cases}$

Pour $e_1\,e_2$ c'est un peu plus compliqué. On a :

- $\lambda(e_1\,e_2) = \lambda(e_1)\&\&\lambda(e_2)$
- $P(e_1\,e_2) = \begin{cases} P(e_1) & \text{si } \lambda(e_1) = F \\ P(e_1) \cup P(e_2) & \text{si } \lambda(e_1) = V \end{cases}$
- $S(e_1\,e_2) = \begin{cases} S(e_2) & \text{si } \lambda(e_2) = F \\ S(e_1) \cup S(e_2) & \text{si } \lambda(e_2) = V \end{cases}$

Pour $e_1\,e_2$ c'est un peu plus compliqué. On a :

- $\lambda(e_1\,e_2) = \lambda(e_1)\&\&\lambda(e_2)$
- $P(e_1\,e_2) = \begin{cases} P(e_1) & \text{si } \lambda(e_1) = F \\ P(e_1) \cup P(e_2) & \text{si } \lambda(e_1) = V \end{cases}$
- $S(e_1\,e_2) = \begin{cases} S(e_2) & \text{si } \lambda(e_2) = F \\ S(e_1) \cup S(e_2) & \text{si } \lambda(e_2) = V \end{cases}$
- $F(e_1\,e_2) = F(e_1) \cup F(e_2) \cup S(e_1) \times P(e_2)$

Exemple

Prenons l'expression $e = x_1 x_2 \star$. On a

e	$\lambda(e)$	$P(e)$	$S(e)$	$F(e)$
x_2				

Exemple

Prenons l'expression $e = x_1 x_2 \star$. On a

e	$\lambda(e)$	$P(e)$	$S(e)$	$F(e)$
x_2	F	$\{x_2\}$	$\{x_2\}$	$\emptyset$
$x_2\star$				

Exemple

Prenons l'expression $e = x_1 x_2 \star$. On a

e	$\lambda(e)$	$P(e)$	$S(e)$	$F(e)$
x_2	F	$\{x_2\}$	$\{x_2\}$	$\emptyset$
$x_2\star$	V	$\{x_2\}$	$\{x_2\}$	$\{x_2x_2\}$
x_1				

Exemple

Prenons l'expression $e = x_1 x_2 \star$. On a

e	$\lambda(e)$	$P(e)$	$S(e)$	$F(e)$
x_2	F	$\{x_2\}$	$\{x_2\}$	$\emptyset$
$x_2\star$	V	$\{x_2\}$	$\{x_2\}$	$\{x_2x_2\}$
x_1	F	$\{x_1\}$	$\{x_1\}$	$\emptyset$
$x_1x_2\star$				

Exemple

Prenons l'expression $e = x_1 x_2 \star$. On a

e	$\lambda(e)$	$P(e)$	$S(e)$	$F(e)$
x_2	F	$\{x_2\}$	$\{x_2\}$	$\emptyset$
$x_2\star$	V	$\{x_2\}$	$\{x_2\}$	$\{x_2x_2\}$
x_1	F	$\{x_1\}$	$\{x_1\}$	$\emptyset$
$x_1x_2\star$	F	$\{x_1\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1x_2, x_2x_2\}$

Exemple

Prenons l'expression $e = x_1 x_2 \star$. On a

e	$\lambda(e)$	$P(e)$	$S(e)$	$F(e)$
x_2	F	$\{x_2\}$	$\{x_2\}$	$\emptyset$
$x_2\star$	V	$\{x_2\}$	$\{x_2\}$	$\{x_2x_2\}$
x_1	F	$\{x_1\}$	$\{x_1\}$	$\emptyset$
$x_1x_2\star$	F	$\{x_1\}$	$\{x_1, x_2\}$	$\{x_1x_2, x_2x_2\}$

Bien évidemment dans le cas présent on aurait pu donner directement la réponse.

Attention

On peut maintenant expliquer le principe de la démonstration du théorème de Kleene. Si on se donne un langage régulier L on peut lui associer une expression régulière e. Ensuite on va linéariser cette expression pour obtenir une expression linéaire f dont le langage associé sera local. On saura alors définir un automate reconnaissant ce langage. Il ne restera plus qu'à faire marche arrière.

Définition 4 (Linéarisation)

Soit e une expression rationnelle sur $\mathscr{A}$. On dit que l'on linéarise l'expression en remplaçant chaque lettre par la lettre x_k où k est la position de la lettre dans l'expression. L'expression obtenue est linéaire par construction

Exemple : Soit $e = (ab|b) \star ba$. La linéarisation est $(x_1x_2|x_3) \star x_4x_5$.

Afin de pouvoir faire marche arrière, il faut garder en mémoire les lettres initiales. Cela peut se faire à l'aide d'une tableau en indiquant en position i la « valeur » de la lettre x_i.

Exemple : Dans notre exemple $e = (ab|b) \star ba$ on récupère le tableau

k	1	2	3	4	5
lettre(k)	a	b	b	b	a

Automate local

Définition 5

Un automate fini déterministe $A = (Q, q_0, F, \delta)$ est dit local si pour toute lettre x de $\mathscr{A}$, il existe un état q' tel que pour tout état q, (q, x) est un blocage ou $\delta(q, x) = q'$.

Automate local

Définition 5

Un automate fini déterministe $A = (Q, q_0, F, \delta)$ est dit local si pour toute lettre x de $\mathscr{A}$, il existe un état q' tel que pour tout état q, (q, x) est un blocage ou $\delta(q, x) = q'$.

Remarque : Cela signifie que toutes les transitions indicées par une lettre x fixée arrivent au même état. C'est-à-dire que lors de la lecture d'un mot, en regardant la dernière lettre lue, on sait dans quel état on est arrivé.

Cela peut s'écrire

$$\forall x \in \mathscr{A}, \#\{q' \in Q \mid \exists q \in Q, \delta(q, x) = q'\} \leq 1$$

Automate local

Théorème 7

Tout langage local est reconnu par un automate local.

Démonstration

On se donne un langage local L sur $\mathscr{A}$ défini par (P, S, F) où F est l'ensemble des facteurs de L. On définit alors l'automate local suivant $A = (Q, q_0, S, \delta)$ où :

Démonstration

On se donne un langage local L sur $\mathscr{A}$ défini par (P, S, F) où F est l'ensemble des facteurs de L. On définit alors l'automate local suivant $A = (Q, q_0, S, \delta)$ où :

- L'ensemble des états $Q = \mathscr{A} \cup \{q_0\}$ est l'alphabet $\mathscr{A}$ sur lequel est défini le langage auquel on ajoute un élément q_0 (on suppose que q_0 n'est pas un élément de $\mathscr{A}$).

Démonstration

On se donne un langage local L sur $\mathscr{A}$ défini par (P, S, F) où F est l'ensemble des facteurs de L. On définit alors l'automate local suivant $A = (Q, q_0, S, \delta)$ où :

- L'ensemble des états $Q = \mathscr{A} \cup \{q_0\}$ est l'alphabet $\mathscr{A}$ sur lequel est défini le langage auquel on ajoute un élément q_0 (on suppose que q_0 n'est pas un élément de $\mathscr{A}$).
- L'état initial est q_0.

Démonstration

On se donne un langage local L sur $\mathscr{A}$ défini par (P, S, F) où F est l'ensemble des facteurs de L. On définit alors l'automate local suivant $A = (Q, q_0, S, \delta)$ où :

- L'ensemble des états $Q = \mathscr{A} \cup \{q_0\}$ est l'alphabet $\mathscr{A}$ sur lequel est défini le langage auquel on ajoute un élément q_0 (on suppose que q_0 n'est pas un élément de $\mathscr{A}$).
- L'état initial est q_0.
- Les états finaux sont les suffixes S si ε n'appartient pas à L et $S \cup \{q_0\}$ si $\varepsilon \in L$.

Démonstration

On se donne un langage local L sur $\mathscr{A}$ défini par (P, S, F) où F est l'ensemble des facteurs de L. On définit alors l'automate local suivant $A = (Q, q_0, S, \delta)$ où :

- L'ensemble des états $Q = \mathscr{A} \cup \{q_0\}$ est l'alphabet $\mathscr{A}$ sur lequel est défini le langage auquel on ajoute un élément q_0 (on suppose que q_0 n'est pas un élément de $\mathscr{A}$).
- L'état initial est q_0.
- Les états finaux sont les suffixes S si ε n'appartient pas à L et $S \cup \{q_0\}$ si $\varepsilon \in L$.
- On définit δ par $\delta(q_0, x) = x$ si $x \in P$ et $\delta(y, x) = x$ si $yx \in F$. Toutes les autres couples sont des blocages de l'automate.

Démonstration

On voit que cet automate est un automate fini, déterministe, standard (par contre il n'est pas complet à priori). De plus il est local car toutes les transitions définies par une lettre x arrivent sur l'état x.

Il est clair que tous les mots du langage L sont reconnus par l'automate par construction.

Démonstration

Réciproquement soit $w_1 w_2 \cdots w_n$ un mot (non vide) reconnu par A. On peut le schématiser par :

$$q_0 \xrightarrow{w_1} w_1 \xrightarrow{w_2} \cdots w_{n-1} \xrightarrow{w_n} w_n.$$

Alors

- $w_1 \in P$ (car sinon $\delta(q_0, w_1)$ est un blocage)
- $w_n \in S$ car c'est un état final et qu'il ne peut valoir q_0
- pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ $w_k w_{k+1} \in F$ car $\delta(w_k, w_{k+1}) = w_{k+1}$.

Donc $w \in (P\mathscr{A}^\star \cap \mathscr{A}^\star S) \setminus (\mathscr{A}^\star N \mathscr{A}^\star) = L \setminus \{\varepsilon\}$.

Remarque

L'automate défini ainsi admet $\#\mathscr{A} + 1$ états.

Exemple

Si on reprend l'expression linéaire $(x_1x_2|x_3) \star x_4x_5$. On peut trouver les paramètres P, S et F qui définissent son langage local.

e	$\lambda(e)$	$P(e)$	$S(e)$	$F(e)$
x_1x_2	F	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_1x_2\}$
x_3				
$(x_1x_2\|x_3)$				
$(x_1x_2\|x_3)\star$				
x_4x_5				
e				

Exemple

Si on reprend l'expression linéaire $(x_1x_2|x_3) \star x_4x_5$. On peut trouver les paramètres P, S et F qui définissent son langage local.

e	$\lambda(e)$	$P(e)$	$S(e)$	$F(e)$
x_1x_2	F	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_1x_2\}$
x_3	F	$\{x_3\}$	$\{x_3\}$	$\emptyset$
$(x_1x_2\|x_3)$				
$(x_1x_2\|x_3)\star$				
x_4x_5				
e				

Exemple

Si on reprend l'expression linéaire $(x_1x_2|x_3) \star x_4x_5$. On peut trouver les paramètres P, S et F qui définissent son langage local.

e	$\lambda(e)$	$P(e)$	$S(e)$	$F(e)$
x_1x_2	F	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_1x_2\}$
x_3	F	$\{x_3\}$	$\{x_3\}$	$\emptyset$
$(x_1x_2\|x_3)$	F	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1x_2\}$
$(x_1x_2\|x_3)\star$				
x_4x_5				
e				

Exemple

Si on reprend l'expression linéaire $(x_1x_2|x_3) \star x_4x_5$. On peut trouver les paramètres P, S et F qui définissent son langage local.

e	$\lambda(e)$	$P(e)$	$S(e)$	$F(e)$
x_1x_2	F	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_1x_2\}$
x_3	F	$\{x_3\}$	$\{x_3\}$	$\emptyset$
$(x_1x_2\|x_3)$	F	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1x_2\}$
$(x_1x_2\|x_3)\star$	V	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1x_2, x_2x_1, x_2x_3, x_3x_1, x_3x_3\}$
x_4x_5				
e				

Exemple

Si on reprend l'expression linéaire $(x_1x_2|x_3) \star x_4x_5$. On peut trouver les paramètres P, S et F qui définissent son langage local.

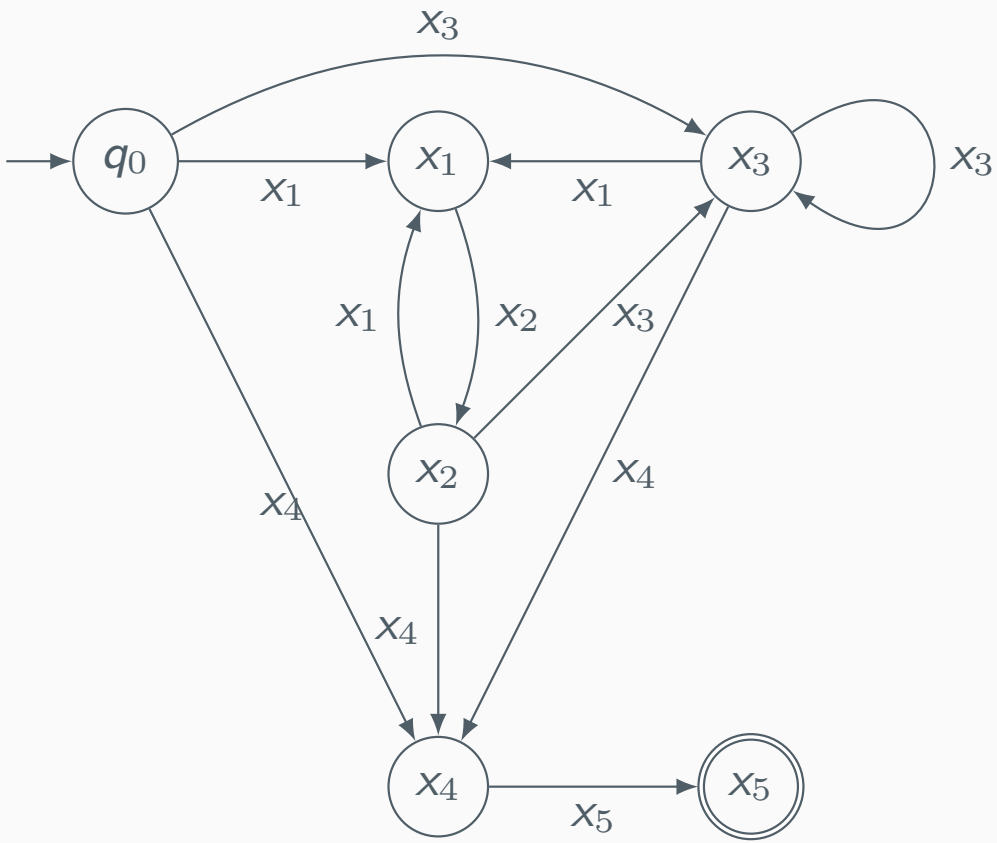
e	$\lambda(e)$	$P(e)$	$S(e)$	$F(e)$
x_1x_2	F	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_1x_2\}$
x_3	F	$\{x_3\}$	$\{x_3\}$	$\emptyset$
$(x_1x_2\|x_3)$	F	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1x_2\}$
$(x_1x_2\|x_3)\star$	V	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1x_2, x_2x_1, x_2x_3, x_3x_1, x_3x_3\}$
x_4x_5	F	$\{x_4\}$	$\{x_5\}$	$\{x_4x_5\}$
e				

Exemple

Si on reprend l'expression linéaire $(x_1x_2|x_3) \star x_4x_5$. On peut trouver les paramètres P, S et F qui définissent son langage local.

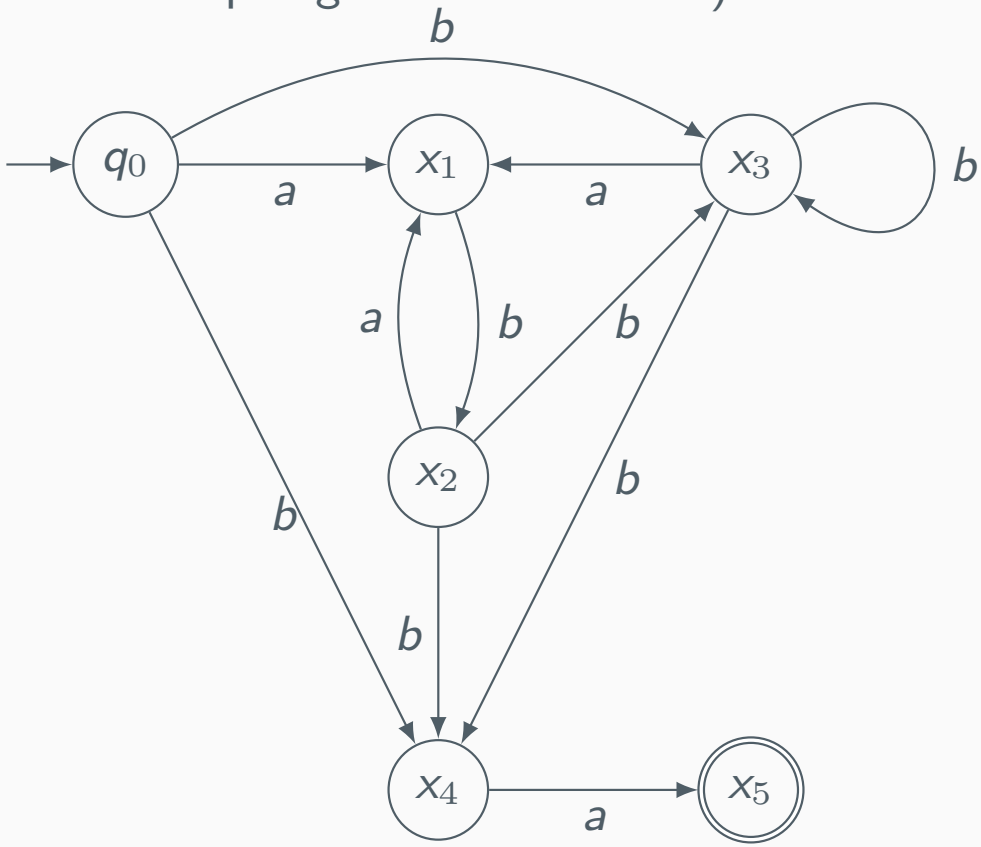
e	$\lambda(e)$	$P(e)$	$S(e)$	$F(e)$
x_1x_2	F	$\{x_1\}$	$\{x_2\}$	$\{x_1x_2\}$
x_3	F	$\{x_3\}$	$\{x_3\}$	$\emptyset$
$(x_1x_2\|x_3)$	F	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1x_2\}$
$(x_1x_2\|x_3)\star$	V	$\{x_1, x_3\}$	$\{x_2, x_3\}$	$\{x_1x_2, x_2x_1, x_2x_3, x_3x_1, x_3x_3\}$
x_4x_5	F	$\{x_4\}$	$\{x_5\}$	$\{x_4x_5\}$
e	F	$\{x_1, x_3, x_4\}$	$\{x_5\}$	$\{x_1x_2, x_2x_1, x_2x_3, x_3x_1, x_3x_3, x_4x_5, x_2x_4, x_3x_4\}$

Exemple



Exemple

Il suffit alors de remplacer de les étiquettes des transitions par les lettres initiales de l'alphabet (que l'on avait pris garde de conserver).



ATTENTION

Attention

L'automate obtenu n'est à priori pas déterministe

Définition 6

On a associé ainsi à tout expression rationnelle un automate (à priori non déterministe). Il s'appelle l'automate de ***Glushkov*** *de l'expression.*

Théorème 8

L'automate de Glushkov associé à une expression rationnelle e reconnait le langage $L(e)$.

Démonstration

Soit $\mathscr{A}$ l'alphabet sur lequel est défini e. On note :

- e' l'expression rationnelle linéaire associée à e obtenue précédemment
- $L(e')$ le langage reconnu par cette expression régulière
- $\mathscr{B}$ l'alphabet sur lequel est défini e'.

On note f l'application de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{A}$ qui associe à une lettre la lettre dont elle est issue (c'est une application de « démarquage »).

Démonstration

On a construit un automate A' reconnaissant $L(e')$.

On note A l'automate de Glushkov obtenu en replaçant les x_i par $f(x_i)$.

Soit $w \in \mathscr{A}^\star$,

$$A \text{ reconnait } w \iff \text{il existe } w' \in \mathscr{B}^\star \text{ tel que } f(w') = w \text{ et } A' \text{ reconnait } w'.$$

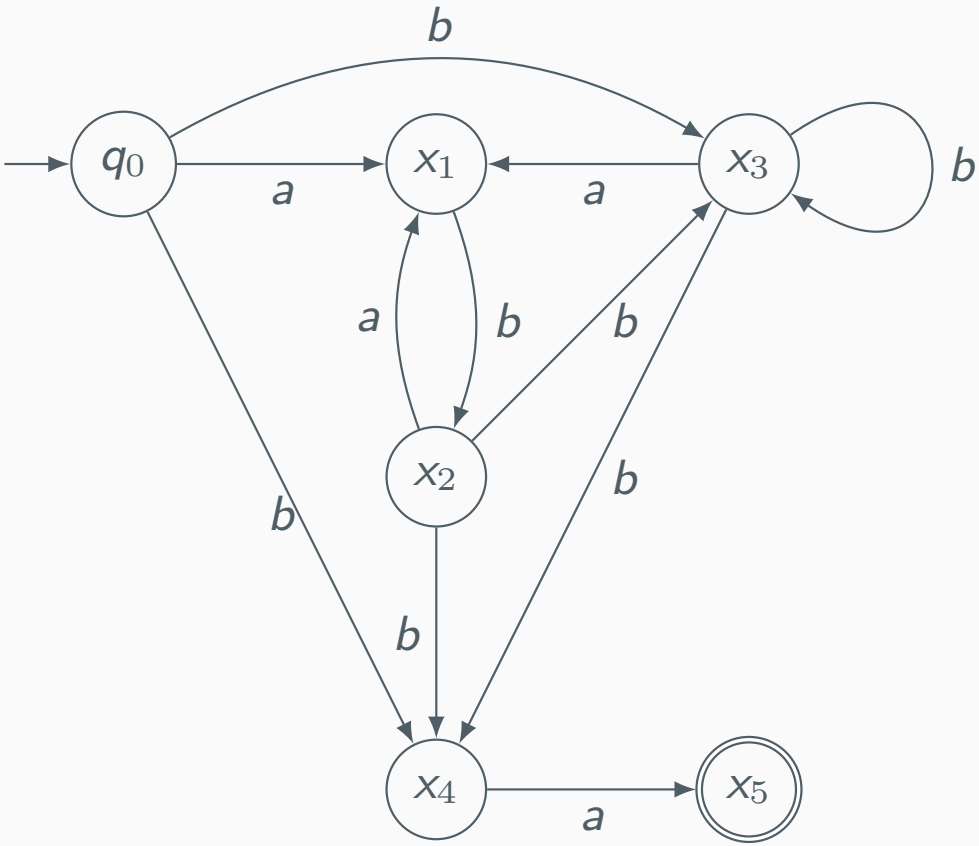
On en déduit que le langage reconnu par A est $f(L(e')) = L(e)$.

Attention

Si on veut obtenir un automate déterministe il suffit d'appliquer la détermination à l'automate de Glushkov.

Exemple

On reprend notre automate



Exemple

On le déterminise :

état	a	b
$\{q_0\}$		

Exemple

On le déterminise :

état	a	b
$\{q_0\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3, x_4\}$
$\{x_1\}$		
$\{x_3, x_4\}$		

Exemple

On le déterminise :

état	a	b
$\{q_0\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3, x_4\}$
$\{x_1\}$	$\emptyset$	$\{x_2\}$
$\{x_3, x_4\}$		
$\{x_2\}$		

Exemple

On le déterminise :

état	a	b
$\{q_0\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3, x_4\}$
$\{x_1\}$	$\emptyset$	$\{x_2\}$
$\{x_3, x_4\}$	$\{x_1, x_5\}$	$\{x_3, x_4\}$
$\{x_2\}$		
$\{x_1, x_5\}$		

Exemple

On le déterminise :

état	a	b
$\{q_0\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3, x_4\}$
$\{x_1\}$	$\emptyset$	$\{x_2\}$
$\{x_3, x_4\}$	$\{x_1, x_5\}$	$\{x_3, x_4\}$
$\{x_2\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3, x_4\}$
$\{x_1, x_5\}$		

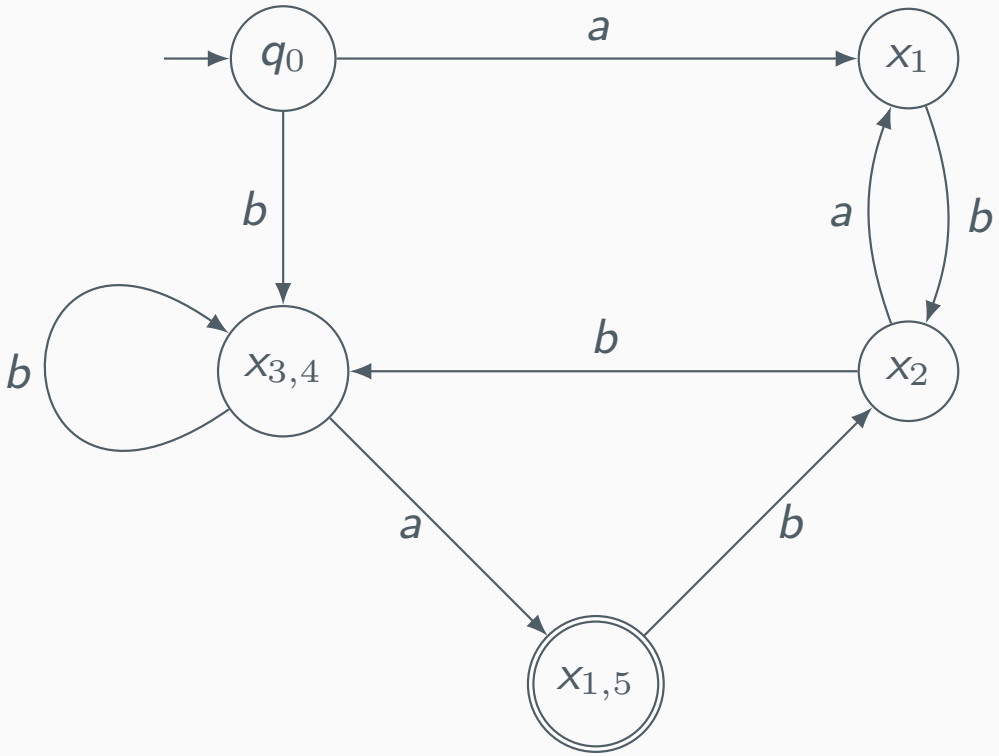
Exemple

On le déterminise :

état	a	b
$\{q_0\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3, x_4\}$
$\{x_1\}$	$\emptyset$	$\{x_2\}$
$\{x_3, x_4\}$	$\{x_1, x_5\}$	$\{x_3, x_4\}$
$\{x_2\}$	$\{x_1\}$	$\{x_3, x_4\}$
$\{x_1, x_5\}$	$\emptyset$	$\{x_2\}$

Exemple

On obtient alors l'automate **déterministe**



On a bien démontré le sens direct du théorème de Kleene

Théorème 9 (Théorème de Kleene)

Tout langage rationnel est reconnaissable (par une automate fini déterministe).

Propriétés de cloture

Introduction

Introduction

On a vu que tout langage rationnel était reconnu par un automate fini. La réciproque est aussi vraie (résultat hors programme - voir plus loin). De ce fait, les langages reconnaissables par un automate sont exactement les langages rationnels.

Par définition on sait que $R(\mathscr{A})$ l'ensemble des langages rationnels est stable par union, concaténation et par étoile. On veut essayer de retrouver ces propriétés via les automates, c'est à dire que si on se donne deux automates A et A' reconnaissant les langages $L(A)$ et $L(A')$, on veut construire des automates reconnaissants les langages $L(A) \cup L(A')$, $L(A)L(A')$ et $L(A)\star$.

On en profitera aussi pour voir les propriétés de clôture pour d'autres opérations ensemblistes : intersection, complémentaire, différence et différence symétrique.

Automate produit et intersection

Automate produit

Définition 7

On se donne deux automates déterministes $A = (Q, q_0, F, \delta)$ *et* $A' = (Q', q'_0, F', \delta')$. *On appelle automate produit l'automate* $A \times A' = (Q \times Q', (q_0, q'_0), F \times F', \Delta)$ *où* $\forall (q, q') \in Q \times Q', \forall x \in \mathscr{A}$,

$$\Delta((q, q'), x) = (\delta(q, x), \delta'(q', x)) \text{ si les deux existent.}$$

Remarques

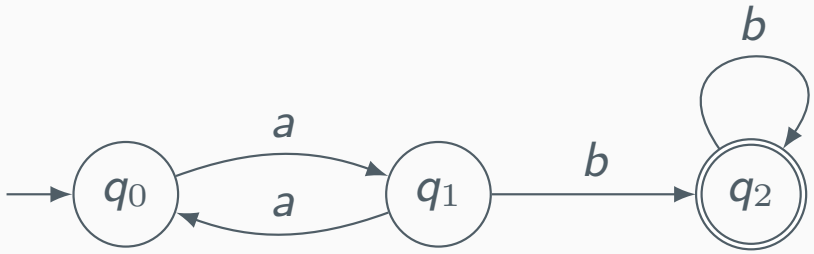
- La notation pour l'automate produit n'est pas standardisée. On trouve $A \times A'$, $A \oplus A'$, $A \otimes A'$,...

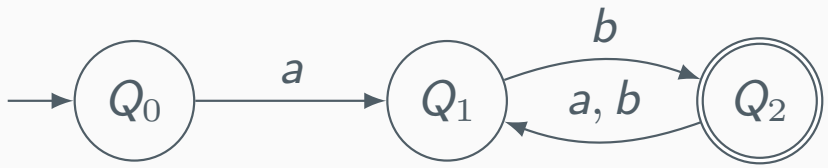
Remarques

- La notation pour l'automate produit n'est pas standardisée. On trouve $A \times A'$, $A \oplus A'$, $A \otimes A'$,...
- Avec les notations de la définition, $((q, q'), x)$ est un blocage dès que (q, x) ou (q', x) en est un

Exemple

On considère les deux automates suivants





Exemple

Ils reconnaissent les langages :

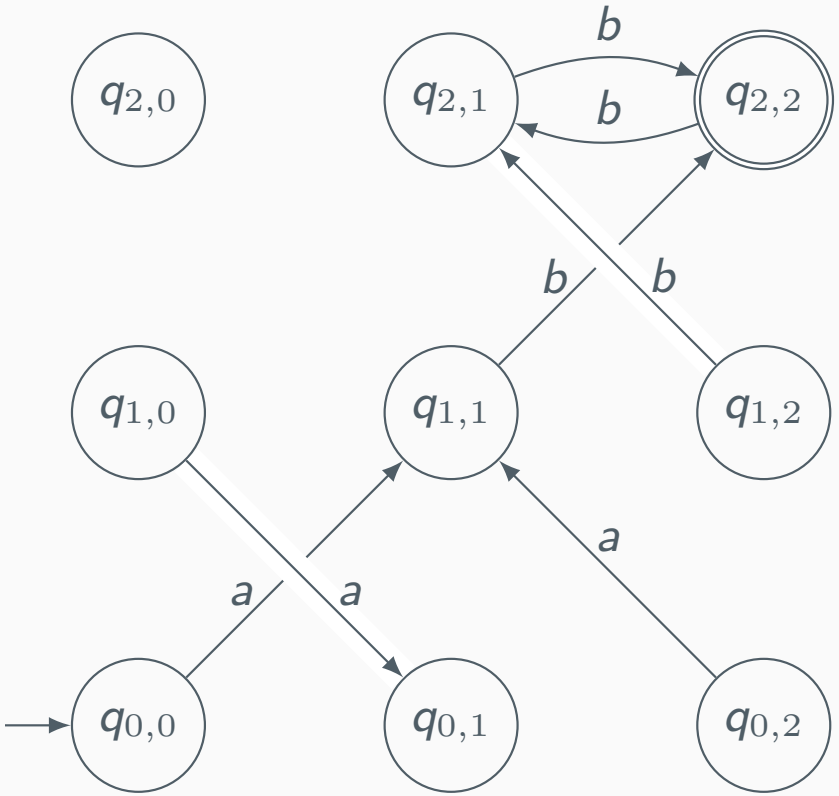
Exemple

Ils reconnaissent les langages :

$$L_1 = L(a(aa) \star bb\star) \text{ et } L_2 = (a(ba|bb) \star b)$$

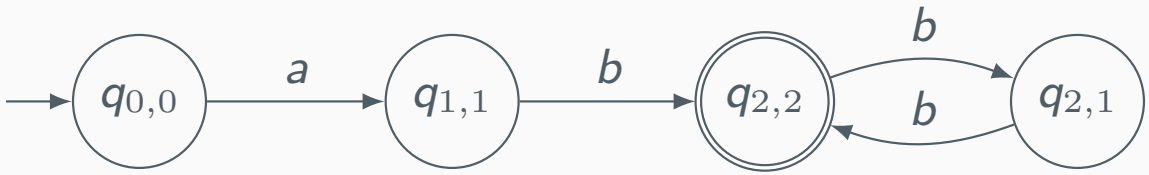
Exemple

On note $q_{i,j}$ l'état (q_i, Q_j). On a alors l'automate produit



Exemple

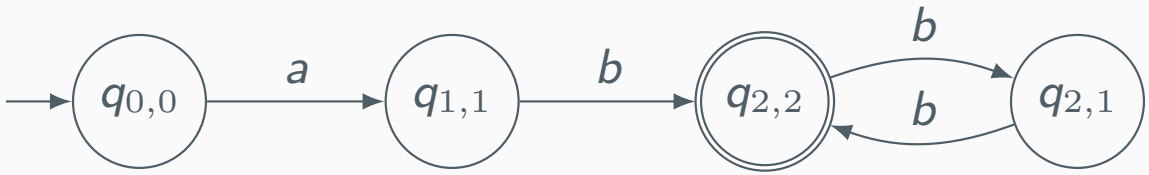
Automate que l'on peut émonder pour obtenir



Le langage reconnu est

Exemple

Automate que l'on peut émonder pour obtenir



Le langage reconnu est $L(ab(bb)\star) = L_1 \cap L_2$

Stabilité par intersection

Théorème 10

Avec les notations précédentes, le langage reconnu par l'automate produit est $L(A) \cap L(A')$

Démonstration

- Soit $w = w_0 w_1 \dots w_n \in L(A) \cap L(A')$. Il existe un calcul dans A

$$q_0 \xrightarrow{w_0} \cdots \xrightarrow{w_n} q$$

où $q \in F$ ainsi qu'un calcul dans A'

$$q'_0 \xrightarrow{w_0} \cdots \xrightarrow{w_n} q'$$

où $q' \in F'$.
Cela nous donne donc un calcul dans l'automate produit :

$$(q_0, q'_0) \xrightarrow{w_0} \cdots \xrightarrow{w_n} (q, q')$$

et $(q, q') \in F \times F'$ est un état terminal de $A \times A'$ donc $w \in L(A \times A')$.

Démonstration

- Réciproquement si $w \in L(A \times A')$ il existe un calcul

$$(q_0, q_0') \xrightarrow{w_0} \cdots \xrightarrow{w_n} (q, q')$$

dans $A \times A'$ où (q, q') est terminal, c'est-à-dire $q \in F$ et $q' \in F'$. On peut alors « projeter » ce calcul dans A et dans A' pour obtenir que $w \in L(A) \cap L(A')$.

Stabilité par intersection

Théorème 11

L'ensemble des langages reconnaissables est stable par intersection.

Réunion

On se donne encore deux automates déterministes $A = (Q, q_0, F, \delta)$ et $A' = (Q', q'_0, F', \delta')$. On veut cette fois construire un automate $A \oplus A'$ tel que $L(A \oplus A') = L(A) \cup L(A')$. On peut penser faire la même chose que ci-dessus mais en prenant pour états finals les états

On se donne encore deux automates déterministes $A = (Q, q_0, F, \delta)$ et $A' = (Q', q'_0, F', \delta')$. On veut cette fois construire un automate $A \oplus A'$ tel que $L(A \oplus A') = L(A) \cup L(A')$. On peut penser faire la même chose que ci-dessus mais en prenant pour états finals les états

$$F \times Q' \cup Q \times F'.$$

Réunion

On se donne encore deux automates déterministes $A = (Q, q_0, F, \delta)$ et $A' = (Q', q'_0, F', \delta')$. On veut cette fois construire un automate $A \oplus A'$ tel que $L(A \oplus A') = L(A) \cup L(A')$. On peut penser faire la même chose que ci-dessus mais en prenant pour états finals les états

$$F \times Q' \cup Q \times F'.$$

Cela « ne marche pas ». En effet si un mot est reconnu par A et donne un blocage dans A' il ne sera pas reconnu par $A \oplus A'$.

Théorème 12

Soit L et L' deux langages et deux automates déterministes **complets** $A = (Q, q_0, F, \delta)$ et $A' = (Q', q'_0, F', \delta')$ qui reconnaissent respectivement L et L'. Le langage $L \cup L'$ est reconnu par l'automate $A \otimes A' = (Q \times Q', (q_0, q'_0), F \times Q' \cup Q \times F', \Delta)$ où

$$\forall (q, q') \in Q \times Q', \forall x \in \mathscr{A}, \Delta((q, q'), x) = (\delta(q, x), \delta'(q', x))$$

Théorème 13

L'ensemble des langages reconnaissables est stable par union.

Théorème 13

L'ensemble des langages reconnaissables est stable par union.

Démonstration : On sait que si L et L' sont des langages reconnus par des automates finis (déterministes). Ils sont reconnus par des automates complets (quitte à ajouter un « puit »). On peut alors considérer l'automate $A \oplus A'$ qui reconnait $L \cup L'$.

Complémentaire

Théorème 14

Soit L un langage rationnel et $A = (Q, q_0, F, \delta)$ un automate **complet** qui reconnait L. Le langage $\overline{L} = \mathscr{A}^\star \setminus L$ est reconnu par l'automate $A' = (Q, q_0, Q \setminus F, \delta)$.

Théorème 14

Soit L un langage rationnel et $A = (Q, q_0, F, \delta)$ un automate **complet** qui reconnait L. Le langage $\overline{L} = \mathscr{A}^\star \setminus L$ est reconnu par l'automate $A' = (Q, q_0, Q \setminus F, \delta)$.

Démonstration : Il suffit de voir que pour tout $w \in \mathscr{A}^\star$,

$$w \in L \iff \delta(q_0, w) \in F$$

puisqu'il n'y a pas de blocages.

Complémentaire

Théorème 15

L'ensemble des langages reconnaissables est stable par complémentaire.

Différence et différence symétrique

Différence et différence symétrique

Théorème 16

Soit L et L' deux langages et deux automates déterministes **complets** $A = (Q, q_0, F, \delta)$ et $A' = (Q', q'_0, F', \delta')$ qui reconnaissent respectivement L et L'.

- L'automate :

  reconnait $L \setminus L'$
- L'automate

  reconnait $L \Delta L' = (L \cup L') \setminus (L \cap L')$

Différence et différence symétrique

Théorème 16

Soit L et L' deux langages et deux automates déterministes **complets** $A = (Q, q_0, F, \delta)$ et $A' = (Q', q'_0, F', \delta')$ qui reconnaissent respectivement L et L'.

- L'automate :

  $$(Q \times Q', (q_0, q'_0), F \times (Q' \setminus F'), \Delta)$$

  reconnait $L \setminus L'$
- L'automate

  reconnait $L \Delta L' = (L \cup L') \setminus (L \cap L')$

Différence et différence symétrique

Théorème 16

Soit L et L' deux langages et deux automates déterministes **complets** $A = (Q, q_0, F, \delta)$ et $A' = (Q', q'_0, F', \delta')$ qui reconnaissent respectivement L et L'.

- L'automate :

  $$(Q \times Q', (q_0, q'_0), F \times (Q' \setminus F'), \Delta)$$

  reconnait $L \setminus L'$
- L'automate

  $$(Q \times Q', (q_0, q'_0), (F \times Q' \cup Q \times F') \setminus (F \times F'), \Delta)$$

  reconnait $L \Delta L' = (L \cup L') \setminus (L \cap L')$

Différence et différence symétrique

Théorème 17

On peut décider si deux automates reconnaissent le même langages car
$L = L' \iff L \Delta L' = \emptyset$

Concaténation

Concaténation

Soit L et L' deux langages reconnus par les automates $A = (Q, q_0, F, \delta)$ et $A' = (Q', q'_0, F', \delta')$. On veut construire un automate reconnaissant LL'.

Concaténation

Soit L et L' deux langages reconnus par les automates $A = (Q, q_0, F, \delta)$ et $A' = (Q', q'_0, F', \delta')$. On veut construire un automate reconnaissant LL'.

L'idée est de « rebrancher » les états finals de A sur l'état initial de A'. Il y a deux méthodes :

Concaténation

Soit L et L' deux langages reconnus par les automates $A = (Q, q_0, F, \delta)$ et $A' = (Q', q'_0, F', \delta')$. On veut construire un automate reconnaissant LL'.

L'idée est de « rebrancher » les états finals de A sur l'état initial de A'. Il y a deux méthodes :

- On fait une « transition instantanée » ou ε-transition entre les états finals de A et q'_0. **Ce n'est plus au programme**.

Concaténation

Soit L et L' deux langages reconnus par les automates $A = (Q, q_0, F, \delta)$ et $A' = (Q', q'_0, F', \delta')$. On veut construire un automate reconnaissant LL'.

L'idée est de « rebrancher » les états finals de A sur l'état initial de A'. Il y a deux méthodes :

- On fait une « transition instantanée » ou ε-transition entre les états finals de A et q'_0. **Ce n'est plus au programme**.
- On va fusionner les états finals de A avec q'_0, pour cela on créer des transitions entre les états finals de A et les états atteints à partir de q'_0 dans A'.

Concaténation

On suppose que les ensembles Q et Q' sont disjoints.

On construit un automate **non-déterministe** reconnaissant LL' par

$$(Q \cup Q', \{q_0\}, \tilde{F}, \Delta)$$

où Δ est définie par $\forall (q,x) \in (Q \cup Q') \times \mathscr{A}$,

$$\Delta(q,x) = \begin{cases} \{\delta(q,x)\} & \text{si } q \in Q \setminus F \\ \{\delta'(q,x)\} & \text{si } q \in Q' \\ \{\delta(q,x), \delta'(q'_0,x)\} & \text{si } q \in F \end{cases}$$

Concaténation

Avec

$$\tilde{F} = \begin{cases} F' & \text{si } \varepsilon \notin L' \\ F \cup F' & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarques

On voit que cet automate reconnait bien LL' - le prouver en exercice.

Étoile

Étoile

Soit L un langage reconnu par l'automate $A = (Q, q_0, F, \delta)$. On peut construire un automate non déterministe reconnaissant le langage $L\star$. Il suffit pour cela :

- Ajouter l'état initial aux états finaux (pour accepter le mot vide s'il ne l'était pas).
- Pour tout $(p, x) \in Q \times \mathscr{A}$ tel que $p = \delta(q_0, x)$ et tout état final q on ajoute une flèche $q \xrightarrow{x} p$.

Compléments

Lemme de l'étoile et applications

Lemme de l'étoile

Nous avons déjà vu comment montrer qu'un langage n'était pas rationnel en se basant que s'il l'était alors il serait reconnu par un automate ayant un nombre fini d'états. Il existe une version un peu plus sophistiquée de cet argument.

Lemme de l'étoile

Nous avons déjà vu comment montrer qu'un langage n'était pas rationnel en se basant que s'il l'était alors il serait reconnu par un automate ayant un nombre fini d'états. Il existe une version un peu plus sophistiquée de cet argument.

L'idée est que si un mot de longueur n est reconnu par un automate ayant N états et que $n \geq N$ alors, tout calcul réussi dans l'automate sur ce mot passe par $n+1$ états et donc (au moins) deux fois par le même état.

Lemme de l'étoile

Théorème 18 (Lemme de l'étoile)

Soit L un langage rationnel, il existe un entier N tel que tout mot w de L tel que $|w| \geq N$ peut s'écrire $w = xyz$ tel que

- $0 < |y| \leq N$ - en particulier $y \neq \varepsilon$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}, xy^k z \in L$

Remarques

- Cela s'appelle aussi le lemme de pompage.

Remarques

- Cela s'appelle aussi le lemme de pompage.
- Cela implique que $x(y\star)z \subset L$.

Démonstration

On sait qu'il existe un automate fini déterministe A reconnaissant L. Si on note N le nombre d'état de A. Tout mot w de L est reconnu par A. De ce fait, il existe un calcul réussi dans A sur w :

$$q_0 \xrightarrow{w_1} q_1 \xrightarrow{w_2} \cdots \xrightarrow{w_p} q_p$$

où $p = |w|$.

Démonstration

On sait qu'il existe un automate fini déterministe A reconnaissant L. Si on note N le nombre d'état de A. Tout mot w de L est reconnu par A. De ce fait, il existe un calcul réussi dans A sur w :

$$q_0 \xrightarrow{w_1} q_1 \xrightarrow{w_2} \cdots \xrightarrow{w_p} q_p$$

où $p = |w|$.

Maintenant, si on suppose $p \geq N$, on voit que le calcul ci-dessus passe par $p+1 > N$ états. Par le principe des tiroirs, il existe $(k, k') \in [\![0, p]\!]^2$ tels que $q_k = q_{k'}$.

Cela signifie que le calcul fait une « boucle » dans l'automate.

Démonstration

On pose alors

$$x = w_1 \cdots w_k ; y = w_{k+1} \cdots w_{k'} \text{ et } z = w_{k'+1} \cdots w_p.$$

On a donc

$$q_k \xrightarrow{y} q_{k'} = q_k.$$

De ce fait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $xy^n z$ est reconnu par l'automate et donc est dans L.

ATTENTION

Le lemme de l'étoile n'est pas explicitement au programme. Si vous voulez l'utiliser vous **devez** le redémontrer.

Exemple

On note L le langage

$$L = \{a, ab, abba, abbabaab, abbabaabbaababba, \cdots\}$$

défini comme étant le plus petit langage contenant a et tel que si $w \in L$ alors $w\overline{w} \in L$ où $\overline{w}$ est obtenu à partir de w en remplaçant les a par des b et réciproquement.

Montrons que L n'est pas rationnel.

Exemple

Supposons par l'absurde que L soit rationnel. Considérons alors un automate reconnaissant L et notons N son nombre d'états. On voit que L ne contient que des mots de longueur 2^p et que réciproquement pour tout entier p, L contient un mot de longueur 2^p.

Exemple

Supposons par l'absurde que L soit rationnel. Considérons alors un automate reconnaissant L et notons N son nombre d'états. On voit que L ne contient que des mots de longueur 2^p et que réciproquement pour tout entier p, L contient un mot de longueur 2^p.

Soit w un mot tel que $|w| \geq N$. Par le lemme de l'étoile, il existe $w = xyz$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, xy^k z \in L$. Si on note $2^p = |w|$ et $r = |y| > 0$, on en déduit que $2^p + r$ et $2^p + 2r$ sont des puissances de 2 ce qui est absurde car :

Exemple

Supposons par l'absurde que L soit rationnel. Considérons alors un automate reconnaissant L et notons N son nombre d'états. On voit que L ne contient que des mots de longueur 2^p et que réciproquement pour tout entier p, L contient un mot de longueur 2^p.

Soit w un mot tel que $|w| \geq N$. Par le lemme de l'étoile, il existe $w = xyz$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, xy^k z \in L$. Si on note $2^p = |w|$ et $r = |y| > 0$, on en déduit que $2^p + r$ et $2^p + 2r$ sont des puissances de 2 ce qui est absurde car :

- Si $r < 2^p$: on a $2^p < 2^p + r < 2^p + 2^p = 2^{p+1}$

Exemple

Supposons par l'absurde que L soit rationnel. Considérons alors un automate reconnaissant L et notons N son nombre d'états. On voit que L ne contient que des mots de longueur 2^p et que réciproquement pour tout entier p, L contient un mot de longueur 2^p.

Soit w un mot tel que $|w| \geq N$. Par le lemme de l'étoile, il existe $w = xyz$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, xy^k z \in L$. Si on note $2^p = |w|$ et $r = |y| > 0$, on en déduit que $2^p + r$ et $2^p + 2r$ sont des puissances de 2 ce qui est absurde car :

- Si $r < 2^p$: on a $2^p < 2^p + r < 2^p + 2^p = 2^{p+1}$
- Si $r = 2^p$: on a $2^p + 2r = 3.2^p$ qui est divisible par 3 et n'est donc pas une puissance de 2.

Finalement L n'est pas rationnel.

Réciproque du théorème de Kleene

Réciproque du théorème de Kleene

On veut justifier la réciproque du théorème de Kleene, à savoir que tout langage reconnu par un automate est rationnel.

Là encore, la preuve est algorithmique. Nous allons, à partir d'un automate fini déterministe A, construire une expression rationnelle e telle que $L(e) = L(A)$.

Réciproque du théorème de Kleene

On veut justifier la réciproque du théorème de Kleene, à savoir que tout langage reconnu par un automate est rationnel.

Là encore, la preuve est algorithmique. Nous allons, à partir d'un automate fini déterministe A, construire une expression rationnelle e telle que $L(e) = L(A)$. Présentons, sur un exemple l'algorithme BMC (Brzozowski-McCluskey). Il existe aussi un autre algorithme (McNaughton Yamada).

Réciproque du théorème de Kleene

On se donne un automate déterministe et on veut construire une expression rationnelle. Pour travailler on étiquette les flèches de l'automate par des expressions rationnelles et plus nécessairement des lettres de $\mathscr{A}$. L'algorithme est le suivant :

Réciproque du théorème de Kleene

1. On ajoute deux nouveaux états α et ω. On relie α à l'état initial q_0 par une transition étiquetée par ε. On relie les états terminaux à ω par une transition ε.
   Le but est d'obtenir un automate standard qui n'a qu'un état final. Si l'automate est standard et qu'il existe un unique état final on peut sauter cette étape

Réciproque du théorème de Kleene

1. On ajoute deux nouveaux états α et ω. On relie α à l'état initial q_0 par une transition étiquetée par ε. On relie les états terminaux à ω par une transition ε.
   Le but est d'obtenir un automate standard qui n'a qu'un état final. Si l'automate est standard et qu'il existe un unique état final on peut sauter cette étape
2. On simplifie l'automate en appliquant les deux méthodes ci-dessous autant que possible.

Réciproque du théorème de Kleene

1. On ajoute deux nouveaux états α et ω. On relie α à l'état initial q_0 par une transition étiquetée par ε. On relie les états terminaux à ω par une transition ε.
   Le but est d'obtenir un automate standard qui n'a qu'un état final. Si l'automate est standard et qu'il existe un unique état final on peut sauter cette étape
2. On simplifie l'automate en appliquant les deux méthodes ci-dessous autant que possible.
   - S'il existe deux états p, q et deux transition $p \xrightarrow{e_1} q$ et $p \xrightarrow{e_2} q$ on les remplace par $p \xrightarrow{e_1 \mid e_2} q$. Ici p peut-être égal à q.

Réciproque du théorème de Kleene

1. On ajoute deux nouveaux états α et ω. On relie α à l'état initial q_0 par une transition étiquetée par ε. On relie les états terminaux à ω par une transition ε.
   Le but est d'obtenir un automate standard qui n'a qu'un état final. Si l'automate est standard et qu'il existe un unique état final on peut sauter cette étape
2. On simplifie l'automate en appliquant les deux méthodes ci-dessous autant que possible.
   - S'il existe deux états p, q et deux transition $p \xrightarrow{e_1} q$ et $p \xrightarrow{e_2} q$ on les remplace par $p \xrightarrow{e_1|e_2} q$. Ici p peut-être égal à q.
   - On supprime un état q (différent de α et ω), et pour tous les états (p, r) distincts de q (mais éventuellement égaux) tels qu'il existe des transitions $p \xrightarrow{e_1} q$, $q \xrightarrow{f} q$ et $q \xrightarrow{e_2} r$, on ajoute une transition $p \xrightarrow{e_1 f^\star e_2} r$

Réciproque du théorème de Kleene

On aboutit à un automate

Remarques :

Réciproque du théorème de Kleene

On aboutit à un automate

Remarques :

- Cet algorithme termine car il diminue le nombres d'états et le nombres de transitions (penser à un ordre lexicographique)

Réciproque du théorème de Kleene

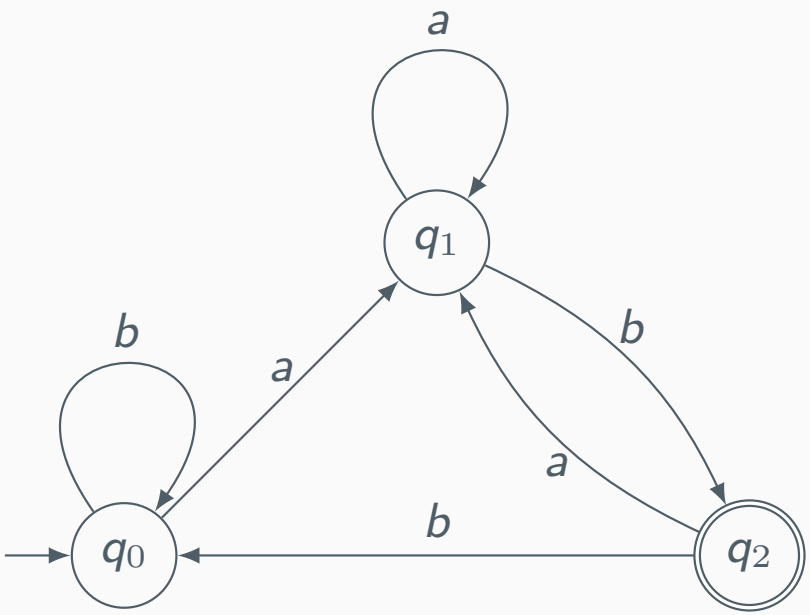
On aboutit à un automate

Remarques :

- Cet algorithme termine car il diminue le nombres d'états et le nombres de transitions (penser à un ordre lexicographique)
- Par construction, le language reconnu par l'automate est celui qui est définit par l'expression rationnelle trouvée.

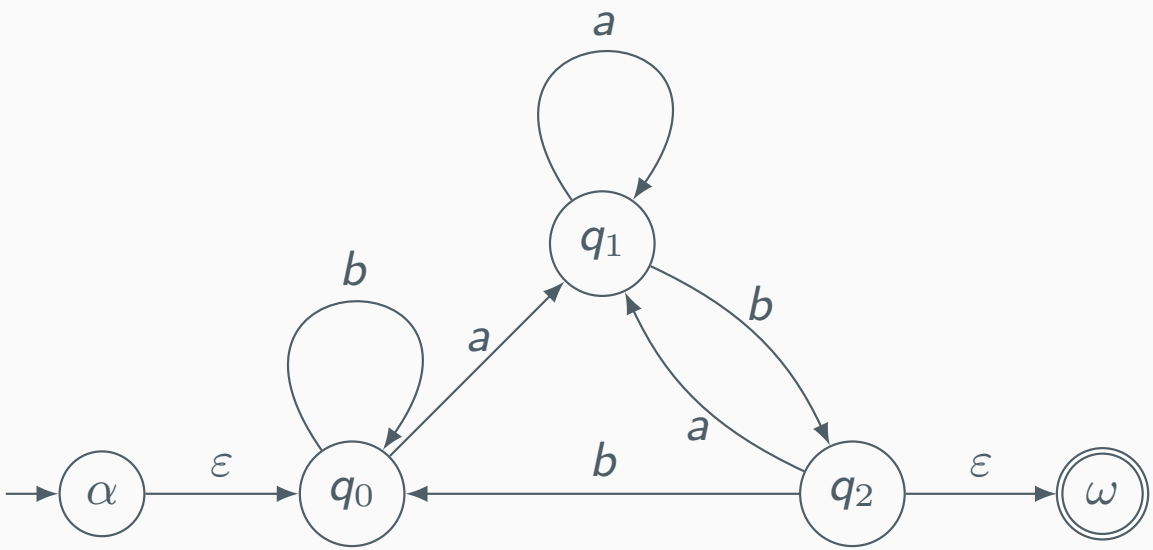
Exemple

Considérons l'automate suivant



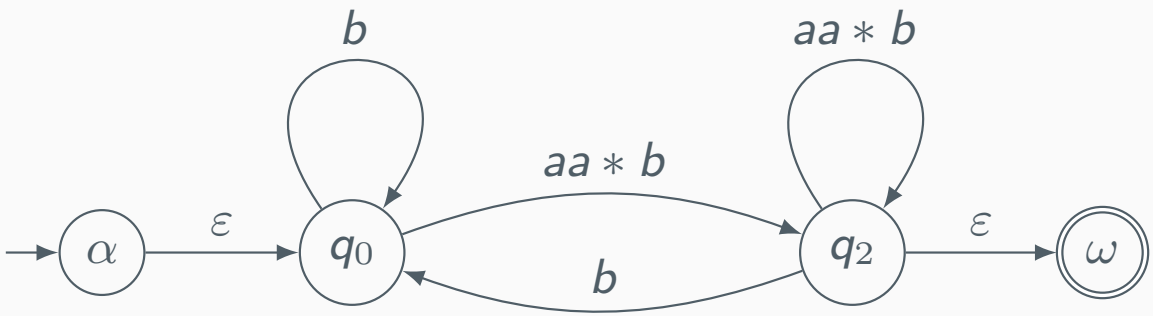
Exemple

On ajoute les états α et ω.



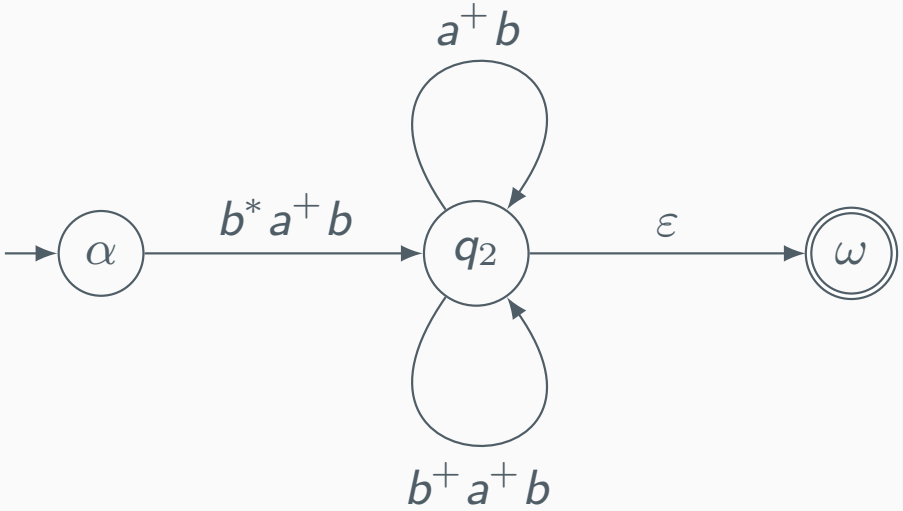
Exemple

On supprime alors l'état q_1



Exemple

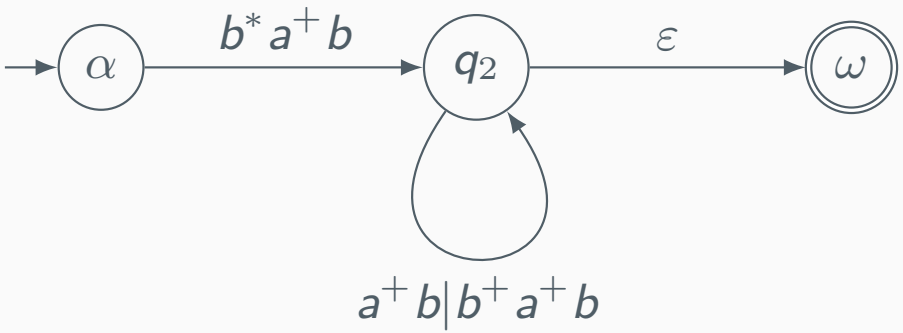
On supprime l'état q_0 :



On rappelle que l'expression rationnelle a^+ désigne $aa\star$.

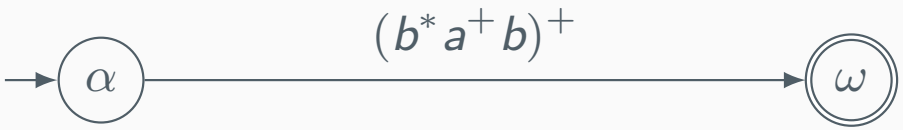
Exemple

On supprime la double flèche :



Exemple

On remarque que $a^+b|b^+a^+b = b^*a^+b$, puis on supprime q_2.



L'expression rationnelle est donc $(b^*a^+b)^+$.