Dans toute la suite E sera un espace vectoriel de dimension finie notée p, I un **segment** de $\mathbf{R}$ et a, b deux fonctions continues de I dans $\mathscr{L}(E)$. On note ℓ la longueur de I, $||.||_E$ une norme de E et $||.||_\infty$ la norme infinie des fonctions de I dans E (relativement à $||.||_E$).

1. C'est du cours.
2. Évaluons $x_{n+1}(t) - x_n(t)$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \in I, x_{n+1}(t) - x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t a(u)(x_n(u)) + b(u)du - x_0 - \int_{t_0}^t a(u)(x_{n-1}(u)) + b(u)du \\ &= \int_{t_0}^t a(u)(x_n(u) - x_{n-1}(u))du\end{aligned}$$

La dernière égalité utilise que pour tout $u \in I$, $a(u)$ est linéaire.

3. Pour toute application f dans $\mathscr{L}(E)$, on pose

$$N(f) = \sup_{x \in E, ||x||=1} ||f(x)||_E.$$

(a) La fonction f est continue (elle est linéaire et E est de dimension finie).
Comme la sphère unité $S = \{x \in E \mid ||x|| = 1\}$ est compacte, la fonction f est bornée sur S. Cela montre que $N(f)$ est bien définie.

(b) Vérifions les axiomes des normes.

- Pour tout $x \in S$, $||f(x)||_E \geqslant 0$ donc $\boxed{N(f) \geqslant 0}$
- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $N(f) = 0$. Pour x dans S, $||f(x)||_E \leqslant 0$ donc $f(x) = 0$. Maintenant pour x non nul on a

$$f(x) = ||x|| f\left(\frac{x}{||x||}\right) = 0$$

Pour finir, $f(0) = 0$ donc $\boxed{f = 0}$

- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, montrons que $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$.
Si $\lambda = 0$ c'est évident
Si $\lambda \neq 0$, on a pour tout $x \in S$,

$$||\lambda f(x)||_E = |\lambda| ||f(x)||_E \leqslant |\lambda| N(f)$$

On en déduit que $N(\lambda f) \leqslant |\lambda| N(f)$.
De plus, on sait que $f = \frac{1}{\lambda}(\lambda f)$ donc $N(f) \leqslant \left|\frac{1}{\lambda}\right| N(\lambda f)$ ce qui implique que $|\lambda| N(f) \leqslant N(\lambda f)$.
Par double inégalité, $\boxed{N(\lambda f) = |\lambda| N(f)}$

- Soit f, g dans $\mathscr{L}(E)$. Pour tout x dans S,

$$||(f+g)(x)||_E \leqslant ||f(x)||_E + ||g(x)||_E \leqslant N(f) + N(g)$$

On en déduit que $\boxed{N(f+g) \leqslant N(f) + N(g)}$

4. La fonction a est supposée continue de I dans $\mathscr{L}(E)$ (en particulier en utilisant la norme N sur l'ensemble d'arrivé). Comme I est un compact (c'est un segment). Il existe M tel que pour tout $t \in I$, $N(a(t)) \leqslant M$.
On a alors pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $t \in I$ que si $x_n(t) - x_{n-1}(t) \neq 0_E$ alors

$$||a(t)(x_n(t) - x_{n-1}(t))||_E = ||x_n(t) - x_{n-1}(t)||_E . \left\|a(t)\left(\frac{x_n(t) - x_{n-1}(t)}{||x_n(t) - x_{n-1}(t)||_E}\right)\right\| \leqslant M ||x_n(t) - x_{n-1}(t)||_E.$$

Le résultat reste vrai si $x_n(t) = x_{n-1}(t)$.

5. Pour $t \geqslant t_0$,

$$\begin{aligned}
||x_2(t)-x_1(t)||_E &= \left\|\int_{t_0}^{t} a(u)(x_1(u)-x_0(u))du\right\| \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} ||a(u)(x_1(u)-x_0(u))||_E du \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} M||x_1(u)-x_0(u)||_E du \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} M||x_1-x_0||_\infty du \\
&\leqslant (t-t_0)M||x_1-x_0||_\infty
\end{aligned}$$

En procédant de même quand $t \leqslant t_0$ on a alors $||x_2(t)-x_1(t)||_E \leqslant |t-t_0|M||x_1-x_0||_\infty$.
Soit $t_0 \in I$ fixé. Montrons par récurrence sur n que pour tout $n \geqslant 1$:

$$H(n) : \forall t \in I, ||x_{n+1}-x_n(t)||_E \leqslant \frac{M^n|t-t_0|^n}{n!}||x_1-x_0||_\infty$$

- $\boxed{\text{I}}$ Le cas $n=1$ a été traité ci-dessus.
- $\boxed{\text{H}}$ Soit $n \geqslant 1$. On suppose $H(n)$ et on montre $H(n+1)$.
  Pour $t \geqslant t_0$,

$$\begin{aligned}
||x_{n+1}(t)-x_n(t)||_E &= \left\|\int_{t_0}^{t} a(u)(x_n(u)-x_{n-1}(u))du\right\| \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} ||a(u)(x_n(u)-x_{n-1}(u))||_E du \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} M||x_n(u)-x_{n-1}(u)||_E du \\
&\leqslant \int_{t_0}^{t} \frac{M^{n+1}|t-t_0|^n}{n!}||x_1-x_0||_\infty du \\
&\leqslant \frac{M^{n+1}(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}||x_1-x_0||_\infty
\end{aligned}$$

  Le cas pour $t \leqslant t_0$ est similaire et on obtient $H(n+1)$.

Comme $|t-t_0| \leqslant \ell$ où ℓ est la longueur de l'intervalle, on a

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \in I, ||x_{n+1}(t)-x_n(t)||_E \leqslant \frac{M^n\ell^n}{n!}||x_1-x_0||_\infty.$$

6. Le résultat précédent permet d'écrire que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, ||x_{n+1}-x_n||_\infty \leqslant \frac{M^n\ell^n}{n!}||x_1-x_0||_\infty.$$

Cela permet de montrer que la série $\left(\sum_{n\geqslant 0} ||x_{n+1}-x_n||_\infty\right)$ converge, ce qui signifie que la série de fonctions $\left(\sum_{n\geqslant 0} x_{n+1}-x_n\right)$ converge normalement donc uniformément sur I. Notons S sa somme. Maintenant, pour tout $N \geqslant 1$, par télescopage

$$X_N = x_0 + \sum_{n=0}^{N-1} x_{n+1}-x_n \xrightarrow{CU} x_0 + S$$

La suite de fonctions (x_n) converge uniformément sur I.

7. Notons x la limite de (x_n), il reste à montrer que x est bien la solution cherchée. Par construction, pour tout entier n et tout $t \in I$,
$$x_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(u)(x_n(u)) + b(u)du$$
Soit $n \in \mathbf{N}$. On pose $z_n : t \mapsto a(t)(x_n(t)) + b(t)$ et $z : t \mapsto a(t)(x(t)) + b(t)$.
Pour tout $t \in I$,
$$||z_n(t) - z(t)||_E = ||a(t)(x_n(t) - x(t))||_E \leqslant M||x_n(t) - x(t)||_E$$
On en déduit que
$$||z_n - z||_\infty \leqslant M||x_n - x||_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
Cela signifie que la suite (z_n) converge uniformément vers z sur le segment I. On a donc bien, en utilisant que I est un segment,
$$\forall t \in I, x(t) = x_0 + \lim_{n\to+\infty} \int_{t_0}^{t} z_n(u)du = x_0 + \int_{t_0}^{t} z(u)du = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(u)(x(u)) + b(u)du$$
La fonction x est bien solution du problème de Cauchy.
8. On suppose avoir deux fonctions x_1 et x_2 vérifiant notre problème de Cauchy (sous sa forme intégrale). On a alors
$$\forall t \in I, x_1(t) - x_2(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)(x_1(u) - x_2(u))du.$$
On peut répéter les calculs des questions 4 et 5 pour obtenir que
$$\forall n \in \mathbf{N}, ||x_1 - x_2||_\infty \leqslant \frac{M^n \ell^n}{n!}||x_1 - x_2||_\infty$$
En faisant tendre n vers ∞, on obtient bien que $||x_1 - x_2||_\infty = 0$ et donc $x_1 = x_2$.
9. Si I n'est plus un segment. On sait que pour tout segment $K \subset I$, il existe une unique solution x_K du problème de Cauchy sur K. Maintenant pour tout $t \in I$ et K, K' deux segments dans I qui contiennent t. On peut considérer le plus petit segment dans I contentant K et K'. Par unicité de la solution sur ce segment on a $x_K(t) = x_{K'}(t)$. De ce fait, on peut construire une fonction $x : t \mapsto x_K(t)$ où K est **un** segment qui contient t.