Le but de ce devoir est de prouver le théorème de Cauchy linéaire

Théorème

Soit

$$(PC)\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

un problème de Cauchy linéaire d'ordre 1 (à valeurs vectorielle) en particulier les fonctions a et b sont **continues**. Il admet une unique solution.

Dans toute la suite E sera un espace vectoriel de dimension finie notée p, I un **segment** de $\mathbf{R}$ et a, b deux fonctions continues de I dans $\mathscr{L}(E)$. On note ℓ la longueur de I, $||.||_E$ une norme de E et $||.||_\infty$ la norme infinie des fonctions de I dans E (relativement à $||.||_E$).

1. Montrer qu'une fonction $x \in \mathscr{C}^1(I, E)$ vérifie (PC) si et seulement si

$$\forall t \in I, x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} a(u)(x(u)) + b(u)du$$

Par la suite, on procède par approximations. On considère la fonction x_0 définie sur I par $x_0 : t \mapsto x_0$ et, pour tout entier n, on pose

$$x_{n+1} : t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^{t} a(u)(x_n(u)) + b(u)du$$

Le but est alors de démontrer que la suite de fonctions (x_n) converge une fonction x qui sera la solution cherchée. De plus, il faut montrer que cette convergence est uniforme afin de pouvoir appliquer les théorèmes usuels d'intégration.

2. Justifier que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \in I$,

$$x_{n+1}(t) - x_n(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)(x_n(u) - x_{n-1}(u))du.$$

3. Pour toute application f dans $\mathscr{L}(E)$, on pose

$$N(f) = \sup_{x \in E, ||x||=1} ||f(x)||_E$$

   (a) Justifier que $N(f)$ est bien définie
   (b) Montrer que $f \mapsto N(f)$ est une norme sur $\mathscr{L}(E)$.

4. Justifier qu'il existe $M \in \mathbf{R}$, tel que $\forall t \in I, N(a(t)) \leqslant M$ et que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$||a(t)(x_n(t) - x_{n-1}(t))||_E \leqslant M||x_n(t) - x_{n-1}(t)||_E$$

5. En déduire que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \forall t \in I, ||x_{n+1}(t) - x_n(t)||_E \leqslant \frac{M^n \ell^n}{n!}||x_1 - x_0||_\infty$$

6. En déduire que la suite de fonction (x_n) converge uniformément vers une fonction x.
   On pourra faire apparaitre une série de fonctions.
7. Vérifier que la fonction x est solution du problème de Cauchy.
8. Montrer l'unicité de la solution du problème de Cauchy.
   On pourra considérer deux solutions et, en procédant comme ci-dessus, montrer que la norme infinie de la différence est nulle.
9. Comment étendre le résultat ou cas où I n'est pas un segment ?