Théorème : Caractérisation des applications de classe $\mathscr{C}^1$

Soit E et F des espaces vectoriels de dimension finie. Soit U un ouvert de E et $f : U \to F$. L'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ si et seulement si elle admet des dérivées partielles par rapport à tous les vecteurs d'une base $\mathscr{B}$ et si ces dérivées partielles sont continues.

Démonstration :

- $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
  Soit $a \in U$, on sait que le fait que f soit différentiable en a implique que pour tout vecteur v non nul de E, f admet une dérivée selon le vecteur v en a et que
  $$D_v f(a) = \mathrm{d}f(a).v$$
  En particulier, pour $v = e_i$, les dérivées partielles $\partial_i f$ existent en a.
  Notons toujours v un vecteur (non nul) de E. On considère ε_v l'application d'évaluation en v définie de $\mathscr{L}(E,F)$ dans F par $\varepsilon_v : \varphi \mapsto \varphi(v)$. Cette application est clairement linéaire et donc continue car $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel de dimension finie.
  On en déduit que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\partial_i f = \varepsilon_v \circ \mathrm{d}f$ car
  $$\forall a \in U, \partial_i f(a) = \mathrm{d}f(a).e_i = \varepsilon_{e_i}(\mathrm{d}f(a))$$
  Cela montre que $\partial_i f$ est continue comme composée de fonctions continues.

  Note : Pour la continuité on peut aussi utiliser les matrices jacobiennes. Plus précisément on note $\mathscr{G} = (g_1, \dots, g_p)$ une base de F et on pose pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, $f_i = g_i^* \circ f : U \mapsto \mathbf{K}$ de sorte que pour tout $a \in U$,
  $$f(a) = f_1(a)g_1 + \cdots f_p(a)g_p$$
  On a alors
  $$\mathrm{Jac}_{f,a} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{G}}(\mathrm{d}f(a)) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \cdots & \partial_p f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_n f_1(a) & \cdots & \partial_n f_p(a) \end{pmatrix}$$
  La continuité de $\mathrm{d}f$ implique que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a \mapsto \partial_i f_j(a)$ est continue. On en déduit que $a \mapsto \partial_i f$ est continue de U dans F.
- $\boxed{\Leftarrow}$
  - Commençons, à titre d'exemple, par traiter le cas d'une fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$. On utilisera $||.||$ la norme infinie sur $\mathbf{R}^2$.
    On suppose que f est une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbf{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbf{R}$. On suppose que les dérivées partielles (notées $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$) existent et sont continues.
    Commençons par montrer que f est alors différentiable.
    Soit $a = (x_0, y_0) \in U$. Comme U est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(a,\delta) \subset U$. Posons alors $V = B((0,0),\delta)$ de sorte que si $h \in V$, $a + h \in U$.
    On veut montrer que pour $h = (\alpha, \beta) \in V$,
    $$f(x_0+\alpha, y_0+\beta) = f(a+h) = f(a) + \partial_1 f(a)\alpha + \partial_2 f(a)\beta + o(h)$$
    On remarque que
    $$\begin{aligned} f(x_0+\alpha, y_0+\beta) - f(x_0,y_0) &= f(x_0+\alpha, y_0+\beta) - f(x_0+\alpha, y_0) + f(x_0+\alpha, y_0) - f(x_0,y_0) \\ &= \int_{y_0}^{y_0+\beta} \partial_2 f(x_0+\alpha, t)dt + \int_{x_0}^{x_0+\alpha} \partial_1 f(t, y_0)dt \end{aligned}$$

On en déduit que

$$f(a+h) = f(a) + \partial_1 f(a)\alpha + \partial_2 f(a)\beta + \int_{x_0}^{x_0+\alpha} \big(\partial_1 f(t,y_0) - \partial_1 f(x_0,y_0)\big)dt + \int_{y_0}^{y_0+\beta} \big(\partial_2 f(x_0+\alpha,t) - \partial_1 f(x_0,y_0)\big)dt$$

Pour la première des deux intégrales du membre de droite, comme $\partial_1 f$ est continue en (x_0, y_0), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $||(x,y) - (x_0,y_0)|| < \eta$ alors $|\partial_1 f(x,y) - \partial_1 f(x_0,y_0)| \leqslant \varepsilon$. En particulier, en prenant $\delta < \eta$ alors pour $h = (\alpha, \beta) \in V$ on a $|\alpha| < \delta$. On en déduit que

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+\alpha} \big(\partial_1 f(t,y_0) - \partial_1 f(x_0,y_0)\big)dt \right| \leqslant |\alpha|\varepsilon$$

Pour la deuxième, on utilise que $\partial_2 f$ est continue en (x_0, y_0), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $||(x,y)-(x_0,y_0)|| < \eta$ alors $|\partial_2 f(x,y) - \partial_1 f(x_0,y_0)| \leqslant \varepsilon$. En prenant toujours $\delta < \eta$ alors pour $h = (\alpha,\beta) \in V$ on a $|\beta| < \delta$. On en déduit que

$$\left| \int_{y_0}^{y_0+\beta} \big(\partial_2 f(x_0+\alpha,t) - \partial_1 f(x_0,y_0)\big)dt \right| \leqslant |\beta|\varepsilon$$

Cela montre que

$$f(x_0+\alpha, y_0+\beta) = f(a+h) = f(a) + \partial_1 f(a)\alpha + \partial_2 f(a)\beta + o(h)$$

La fonction f est donc différentiable en a. Cela peut être fait pour tout $a \in U$ donc f est différentiable.

- Dans le cas général on considère une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E. Là encore on travaille avec la norme infinie relativement à cette base.

  Soit $a = x_1 e_1 + \cdots + e_n \in U$. En utilisant que U est ouvert, on sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que $B(a,\delta) \subset U$. Soit $h \in B(0_E, \delta)$. Pour tout $i \in [[1,n]]$ on note $h_i = e_i^*(h)$. On veut alors montrer que

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) h_i + o(h)$$

  On pose pour tout $i \in [[1,n]]$, $u_i = h_1 e_1 + \cdots + h_i e_i$ en convenant que $u_0 = 0$. On remarque que $u_n = h$. On a alors

$$\begin{aligned}
f(a+h) - f(a) &= f(a+u_n) - f(a+u_0)\\
&= \sum_{i=1}^{n} f(a+u_i) - f(a+u_{i-1})\\
&= \sum_{i=1}^{n} f(a+u_{i-1}+h_i e_i) - f(a+u_{i-1})\\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i}^{x_i+h_i} \partial_i f(a+u_{i-1}+te_i)dt\\
&= \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(a) + \int_{x_i}^{x_i+h_i} \big(\partial_i f(a+u_{i-1}+te_i) - \partial_i f(a)\big)dt
\end{aligned}$$

  Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $i \in [[1,n]]$ il existe η_i tel que si $||u|| < \eta_i$, $||\partial_i f(a+u) - \partial_i f(a)||_F \leqslant \varepsilon$. On pose $\eta = \mathrm{Min}(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Si on prend $\delta < \eta$, on obtient que pour tout $i \in [[1,n]]$ et tout t compris entre x_i et $x_i + h_i$, $||u_{i-1} + te_i|| < \delta < \eta$ et donc

$$\left\| \int_{x_i}^{x_i+h_i} \big(\partial_i f(a+u_{i-1}+te_i) - \partial_i f(a)\big)dt \right\|_F \leqslant |h_i|\varepsilon$$

  Cela montre que

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) h_i + o(h)$$

- Maintenant que l'on sait que f est différentiable, on a

$$\mathrm{d}f : a \mapsto \mathrm{d}f(a) = \sum_{i=1}^{n} \partial_i f(a) e_i^*$$

La continuité des dérivée partielle assure la continuité de la différentielle.

Note : on peut, comme ci-dessus, montrer la continuité en étudiant les matrices jacobiennes.

$\square$