1. Soit $x \in [a, b]$. On applique le théorème de continuité des intégrales à paramètres.
   *i)* Pour $t \in [c, d]$, $u \mapsto f(u, t)$ est continue (par morceaux) sur $[a, x]$.
   *ii)* Pour $c \in [a, x]$, $t \mapsto f(u, t)$ est continue sur $[c, d]$
   *iii)* Domination : La fonction $f$ est continue sur $K = [a, b] \times [c, d]$ qui est compact comme produit de deux compacts (les segments de $\mathbf{R}$ sont compacts). Elle est donc bornée. Notons $M$ tel que pour tout $(u, t) \in K$, $|f(u, t)l \leqslant M$.
   La fonction constante égale à $M$ est intégrable sur le segment $[a, x]$ et
   $$\forall t \in [c, d], \forall u \in [a, x] \subset [a, b], |f(u, t)| \leqslant M$$
   On en déduit que la fonction $t \mapsto \varphi(x, t) = \displaystyle\int_a^x f(u, t)du$ est définie et continue sur $[c, d]$.
2. On applique le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres.
   *i)* Pour $x \in [a, b]$, $t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $[c, d]$ d'après la question précédente.
   *ii)* Pour $x \in [a, b]$, $t \mapsto \varphi(x, t)$ est intégrable sur le segment $[c, d]$.
   *iii)* Pour $t \in [c, d]$, $x \mapsto \varphi(x, t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ d'après le théorème fondamental de l'analyse car $u \mapsto f(u, t)$ est continue. On a
   $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} : (x, t) \mapsto f(x, t)$$
   De plus
   $\alpha$) Pour $x \in [a, b]$, $t \mapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = f(x, t)$ est continue (par morceaux) sur $[c, d]$.
   $\beta$) Pour $t \in [c, d]$, $x \mapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) = f(x, t)$ est continue sur $[a, b]$
   $\gamma$) Domination : en reprenant la fonction constante égale à $M$ de la questions précédente. Elle est intégrable sur $[c, d]$ et
   $$\forall t \in [c, d], \forall x \in [a, b], \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)\right| = |f(x, t)| \leqslant M$$
   On en déduit que la fonction $\psi : x \mapsto \displaystyle\int_c^d \varphi(x, t)dt$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$.
   De plus, pour tout $x \in [a, b]$,
   $$\psi'(x) = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)dt = \int_c^d f(x, t)dt$$
3. Soit $x \in [a, b]$, d'après le théorème fondamental de l'analyse (car $\psi$ est de classe $\mathscr{C}^1$),
   $$\int_a^x \left(\int_c^d f(u, t)dt\right) du = \int_a^x \psi'(u)du = \psi(x) - \psi(a) = \psi(x) = \int_c^d \varphi(x, t)dt = \int_c^d \left(\int_a^x f(u, t)du\right) dt$$
   où $\psi(a) = \displaystyle\int_c^d \varphi(a, t)dt = 0$ car $\varphi(a, t) = \displaystyle\int_a^a f(u, t)du = 0$.
4. Pour $x = b$,
   $$\int_a^b \left(\int_c^d f(u, t)dt\right) du = \int_c^d \left(\int_a^b f(u, t)du\right) dt$$