

On veut démontrer le théorème de Fubini.

Théorème (Théorème de Fubini)

Soit f une application continue sur $[a, b] \times [c, d]$, à valeurs dans \mathbf{R} . On a

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(u, t) dt \right) du = \int_c^d \left(\int_a^b f(u, t) du \right) dt$$

Soit $a < b$ et $c < d$. On considère une application f continue sur $[a, b] \times [c, d]$, à valeurs dans \mathbf{R} . Pour tout $(x, t) \in [a, b] \times [c, d]$, on pose : $\varphi(x, t) = \int_a^x f(u, t) du$.

1. Montrer que pour tout $x \in [a, b]$, l'application $t \mapsto \varphi(x, t)$ est continue sur $[c, d]$.

On pose alors, pour tout $x \in [a, b]$: $\psi(x) = \int_c^d \varphi(x, t) dt$.

2. Montrer que ψ est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$; préciser ψ' .

3. En déduire :

$$\forall x \in [a, b], \quad \int_a^x \left(\int_c^d f(u, t) dt \right) du = \int_c^d \left(\int_a^x f(u, t) du \right) dt.$$

4. Conclure