1 Cartes, mélange et réussite

1.1 : On peut remarquer que $\sigma \mapsto \sigma^{-1}$ est une involution de $\mathcal{U}$ vers lui-même et que

$$\sigma = eg_1 \cdots g_k$$

équivaut à

$$\sigma^{-1} = eg_k^{-1} \cdots g_1^{-1}.$$

Par conséquent $U(\sigma) = U(\sigma^{-1})$.
Si $\sigma = e$ ou $\tau = e$ alors $U(\sigma\tau) = U(\sigma) + U(\tau)$. Sinon on peut écrire

$$\sigma = eg_1 \cdots g_k, \qquad \tau = eh_1 \cdots h_l$$

donc

$$\sigma\tau = eg_1 \cdots g_k h_1 \cdots h_l = eg'_1 \cdots g'_{k+l}$$

et $U(\sigma\tau) \leq U(\sigma) + U(\tau)$.

1.2 : Puisque $(i,j) = (j,i)$ on peut supposer $i < j$. $U(i,j) \geq 1$ puisque $(i,j) \neq e$. $(i,j) = c_{i,j}$ dès que $j = i+1$, donc $U((i,i+1)) = 1$.
Si $j > i+1$ on ne peut avoir $(i,j) = c_{k,l}$ car le nombre d'entiers invariants par $c_{k,l}$ est $n - |l-k| - 1$.
Il faudrait donc $|l-k| = 1$ et $c_{k,l} = (k,l) = (i,j)$, ce qui est impossible. Donc $U((i,j)) \geq 2$.
Or si $j > i+1$ $(i,j) = c_{j,i+1}c_{i,j}$ donc $U((i,j)) = 2$.
En conclusion $U((i,j)) = 2$ si $|i-j| \geq 2$ et $U((i,j)) = 1$ sinon.

1.3 : Soient $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ tels que

$$\sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \cdots < \sigma(i_k),$$

si aucun des i_m n'est égal à i ou j on aura, si $i < j$,

$$\sigma c_{i,j}(i'_1) < \sigma c_{i,j}(i'_2) < \cdots < \sigma c_{i,j}(i'_k),$$

où $i'_m = i_m$ si $i_m < i$ ou $i_m > j$ et $i'_m = i_m - 1$ sinon. Si $i > j$ on prendra $i'_m = i_m$ si $i_m < i$ ou $i_m > j$ et $i'_m = i_m + 1$ sinon. On en déduit $L(\sigma c_{i,j}) \geq L(\sigma)$.
Si $i_p = i$ et $j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$ on aura, si $i < j$

$$\sigma c_{i,j}(i'_1) < \sigma c_{i,j}(i'_2) < \cdots < \sigma c_{i,j}(i'_{k-1}),$$

où $i'_m = i_m$ si $i_m < i$, $i'_m = i_{m+1} - 1$ si $i_{m+1} > i$ et $i_{m+1} < j$ et $i'_m = i_{m+1}$ sinon. Une construction similaire si $j > i$ permet d'obtenir $L(\sigma c_{i,j}) \geq L(\sigma) - 1$
Les cas $i = i_p$ et $j = i_l$ se traitent de la même manière (le cas $i < j$ étant en fait contenu dans la construction précédente). On aura aussi $L(\sigma c_{i,j}) \geq L(\sigma) - 1$.
Pour tout σ de S_n et tout couple (i,j) avec $i \neq j$: $L(\sigma c_{i,j}) \geq L(\sigma) - 1$. En remplaçant σ par $\sigma c_{i,j}$ et $c_{i,j}$ par $c_{j,i}$ on en déduit $L(\sigma c_{i,j}) - 1 \leq L(\sigma)$ et finalement $|L(\sigma c_{i,j}) - L(\sigma)| \leq 1$.
En prenant $\sigma = eg_1 \cdots g_k$ on obtient, par application de l'inégalité triangulaire : $|L(\sigma) - L(e)| \leq U(\sigma)$. $L(e) = n$ donc en particulier $L(\sigma) + U(\sigma) \geq n$.
Réciproquement, soit σ une permutation distincte de e. Notons $k = L(\sigma)$, $k < n$. Soient $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ tels que

$$\sigma(i_1) < \sigma(i_2) < \cdots < \sigma(i_k).$$

Puisque $k < n$ soit $2 \leq i_1$, soit $i_k \leq n-1$, soit il existe m avec $i_{m+1} \geq i_m + 2$. Plaçons-nous dans ce troisième cas, ce qui ne nuit pas à la généralité. Par maximalité de k on peut affirmer $\sigma(i_m+1) < \sigma(i_m)$ ou $\sigma(i_m+1) > \sigma(i_{m+1})$. Choisissons par exemple la première éventualité. Soit

$$p = \min\{l; l \leq m, \sigma(i_l) > \sigma(i_m + 1)\}.$$

Soit $i = p$ et $j = i_m + 1$. Alors $L(\sigma c_{i,j}) \geq L(\sigma) + 1$.
On peut donc construire par induction un produit τ d'au plus $n - L(\sigma)$ cycles tel que $L(\sigma\tau) \geq n$, c'est-à-dire $\sigma\tau = e$. Par conséquent $\sigma = \tau^{-1}$ et $U(\sigma) \leq n - L(\sigma)$ ce qui nous donne l'autre inégalité $L(\sigma) + U(\sigma) \leq n$, puis $L(\sigma) + U(\sigma) = n$.

1.4 : On vérifie facilement qu'il est possible de choisir dans chaque ligne un élément pour obtenir ainsi une sous-suite croissante, de telle sorte que le dernier élément soit en bas de sa colonne. Cette propriété est vérifiée initialement lorsque l'on pose la première carte et elle est préservée par le procédé de construction.
Réciproquement soit σ une permutation et $(i_1, \ldots, i_k)$ une sous-suite croissante de σ. Alors $\sigma(i_p)$ ne peut être inséré avant la p-ième colonne. Ce résultat se prouve par récurrence sur p. Il est vrai pour $p = 1$. En supposant le résultat vrai à l'ordre p, pour tout j l'élément à la base de la colonne où est inséré $\sigma(i_j)$ est inférieur ou égal à $\sigma(i_j)$. Donc $\sigma(i_{p+1})$ est strictement supérieur à toutes ces valeurs et ne peut être inséré avant la $p+1$-ième colonne.

1.5 : Il suffit de remarquer que lorsqu'on crée une colonne c'est avec un élément qui complète une sous-suite croissante déjà existante. Il suffit de mémoriser la valeur au moment où on l'insère.

```
CroissantMax(n, s dans Sn)
  taille <- 1
  res[1] <- s(1)
  pour i de 2 \`a n par pas de 1 faire
     si s(i)>res[taille] alors
        taille <- taille + 1
        res[taille] <- s(i)
     sinon
        k <- taille -1
        tant que (k>0) et (res[k]<s(i)) faire
           k  <- k-1
        fin tant que
        res[k] <- s(i)
     fin si sinon
  fin pour
  retourner res
```

1.6 : Pour tout σ de S_n on a $Inv(\sigma\tau) \leq Inv(\sigma) + 1$ si τ est dans K. Pour justifier ce résultat on raisonne par exhaustion : si $\tau = (k, k+1)$ alors

$$\begin{aligned}
\{(i,j); i < j\} &= \{(i,j); i < j, \{i,j\} \cap \{k, k+1\} = \emptyset\} \\
&\bigcup \{(i,j); i < k, j \in \{k, k+1\}\} \\
&\bigcup \{(i,j); j > k+1, i \in \{k, k+1\}\} \\
&\bigcup \{(k, k+1)\}
\end{aligned}$$

Par conséquent $Inv(\sigma) \leq K(\sigma)$.
Réciproquement s'il existe (i,j) avec $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$ alors il existe k dans $[i, j-1]$ tel que $\sigma(k) > \sigma(k+1)$. Pour un tel k on aura $Inv(\sigma(k, k+1)) = Inv(\sigma) - 1$. Par conséquent il existe un produit σ' de $Inv(\sigma)$ éléments de K tel que $Inv(\sigma\sigma') = 0$ c'est-à-dire $\sigma = \sigma'^{-1}$. Puisque K est stable par passage à l'inverse, il en résulte $K(\sigma) = Inv(\sigma)$.

1.7 : On montre par récurrence sur i que pour $k \geq i$ à la fin de l'exécution des instructions d'une boucle on a :

$$\forall k \geq i \qquad \sigma(k) = k.$$

A la fin de la boucle on a $\sigma = e$ donc $inv \geq K(\sigma)$ (car $i - k = Inv((k, k+1) \cdots (i-1, i))$.
D'autre part, si $k < i$ $Inv(\sigma.(k, k+1) = Inv(\sigma) - 1$ car $\sigma(k+1) < \sigma(k) = i$ puisque pour tout $l \geq i+1$ $\sigma(l) = l$ et pour tout l de $[k+1, i]$ $\sigma(l) \neq i$.
Le même argument itéré donne

$$Inv(\sigma.(k, k+1) \cdots (i-1, i)) = Inv(\sigma) - (i - k).$$

Ceci justifie $inv = K(\sigma)$.

Ce nouvel algorithme ne retourne pas nécessairement $U(\sigma)$ mais un nombre a priori plus grand. En effet, pour la permutation donnée en exemple on obtient

$$\sigma = c_{17}c_{36}c_{45}c_{23}c_{12}.$$

Donc l'algorithme renvoie 5 alors que $U(\sigma) = 4$. Cela vient de $c_{23}c_{12} = c_{31}$.

2 Tableaux de Young

2.1 : Soit $P(n, k)$ le nombre de partitions généralisées de n en au plus k entiers (une telle partition est une suite d'entiers $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ telle que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k \geq 0$ et $\sum \lambda_i = n$.)
On a

$P(0, 0) = 1,$
$P(n, 0) = 0$ si $n > 1,$
$P(n, k) = P(n, k-1)$ si $n \leq k-1,$
$P(n, k) = P(n-k, k) + P(n, k-1)$ si $n \geq k.$

L'idée générale étant que si

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_k \geq 0$$

est une partition généralisée de n alors soit $\lambda_k = 0$ et

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_{k-1} \geq 0$$

est une partition généralisée de n, soit

$$\lambda_1 - 1 \geq \lambda_2 - 1 \cdots \geq \lambda_k - 1 \geq 0$$

est une partition généralisée de $n-k$. La construction inverse étant naturelle.
Le nombre de partitions de n est alors $Part(n) = P(n, n)$. La complexité de cette fonction est (en termes d'appels de fonction) essentiellement égale à $Part(n)$. Elle n'est donc pas bonne.

2.2 : On démontre le résultat comme en 1.4 : un élément inséré à la base de la colonne p est la plus petite valeur achevant une sous-suite croissante de longueur p et les valeurs de cette suite sont prises dans les colonnes précédentes.

2.3 : Il est équivalent de montrer que le tableau obtenu par insertion en colonne du mot $\overline{\sigma}$ redonne $P(\sigma)$. Pour cela on prouve par récurrence sur p que si $(i_1, \dots, i_p)$ sont distincts

$$c_{i_1} \circ \cdots \circ c_{i_p}(\Theta) = l_{i_p} \circ \cdots \circ l_{i_1}(\Theta).$$

Cela résulte de la propriété de commutation admise et de la remarque

$$c_{i_p}(\Theta) = l_{i_p}(\Theta).$$

2.4 : Il suffit de montrer $\max(L(\sigma), L(\overline{\sigma})) \geq n$ car $U(\sigma) = n^2 - L(\sigma)$. Or si le tableau possède p colonnes la hauteur q de la première colonne doit être telle que $pq \geq n^2$. Donc $p \geq n$ ou $q \geq n$.
On aura égalité si le tableau est carré. Une possibilité est

$$\sigma = (n^2 - n + 1, n^2 - n + 2, \dots, n^2, \dots, n + 1, \dots, 2n, 1, \dots, n).$$

2.5 : Il y a d_λ^2 couples de tableaux de forme λ. Les deux formules découlent de ce résultat si on admet la bijection. Justifions la bijection. La validité de l'algorithme découle de la question 2.3. Pour obtenir la permutation à l'aide du couple de tableaux on opère ainsi : on enlève successivement dans P les cases numérotées $n, n-1, \dots, 1$ dans Q. La valeur de chaque case supprimée est réinsérée dans la tableau en utilisant l'algorithme InsèreColonne pour l'ordre inverse. La suite des dernières valeurs chassées par ces réinsertions donnent $\sigma(n), \sigma(n-1), \dots, \sigma(1)$.

2.6 : $\sigma = \sigma^{-1}$ si et seulement si $P = Q$. Or il y a d_λ couples (P, P) où P est de forme λ. $\sum d_\lambda$ représente donc le nombre de permutations involutives. Une telle permutation est une permutation qui peut s'écrire comme un produit de transpositions de supports disjoints. $\sum d_\lambda$ est donc égal au nombre de partitions de l'ensemble $\{i, \dots, n\}$ en k ensembles à deux éléments (et $(n-2k)$ singletons). Par conséquent :

$$\sum d_\lambda = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{k!} \left(\frac{n(n-1)}{2} \frac{(n-2)(n-3)}{2} \cdots \frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{2} \right) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{n!}{2^k (n-2k)! k!}.$$

3 Représentations linéaires du groupe symétrique

3.1 : Question classique. les seuls morphismes de S_n vers $(C^*, \times)$ sont la signature et la fonction constante 1.

3.2 : Il est facile de vérifier que l'on obtient bien un produit scalaire. En utilisant le théorème de Cayley on prouve qu'il est invariant par $\Phi(\sigma)$ pour tout σ de S_n.
Si F est stable alors $F^\perp$ sera donc aussi stable. Si Ψ est réductible il existe F stable non nul et distinct de E. Ψ induit sur F et $F^\perp$ deux représentations. On raisonne alors par récurrence sur $\dim E$ pour décomposer E en une somme directe $\bigoplus E_i$ où chaque E_i est irréductible.

3.3 :$S_H(\sigma)(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ Donc H est stable et S est réductible. Soit $\sigma = (1, 2)$, puisque H est stable :

$$(1, -1, 0, \ldots, 0, 1) = \frac{1}{x_1 - x_2}(x - S(\sigma)(x)) \in H.$$

De même $(0, 1, -1, 0, \ldots), \ldots, (1, \ldots, 0, 1, -1)$ sont des éléments de H. On obtient ainsi une base H formée d'élément de $\sum \mathbb{C}S(\sigma)(x)$.En conclusion H est le seul sous-espace de H stable et contenant un vecteur dont toutes les composantes sont distinctes.
La démonstration précédente reste valable simplement si il existe $i \neq j$ tels que $x_i = x_j$. En effet, on obtient ainsi un vecteur $(0, 1, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots)$ dans $\sum \mathbb{C}S(\sigma)(x)$, puis par permutation des coordonnées on peut retrouver les vecteurs de la base précédente. Or tout élément non nul de H possède au moins deux coordonnées distinctes, donc tout sous-espace stable non réduit à $\{0\}$ est égal à H et S_H est irréductible.

3.4 : Il y a trois partitions de 3. Les relations des questions précédentes donnent

$$d_{\lambda_1} + d_{\lambda_2} + d_{\lambda_3} = 4, \qquad d_{\lambda_1}^2 + d_{\lambda_2}^2 + d_{\lambda_3}^2 = 6.$$

Soit

$$d_{\lambda_1} = d_{\lambda_2} = 1, d_{\lambda_3} = 2.$$

Il existe deux représentations irréductibles de degré 1 (1 et ϵ) et une représentation irréductible de degré 2 (S_H).
Prenons $((1, -1, 0), (0, 1, -1))$ pour base de H, $\sigma_1 =$ Id, $\sigma_2 = (1, 2)$, $\sigma_3 = (2, 3)$,...On obtient sans difficulté $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, ...
Il y a cinq partitions de 4 deux de degré 1 (1 et ϵ) et une de degré 3 (S_H). On a toujours

$$d_{\lambda_1} + d_{\lambda_2} + d_{\lambda_3} + d_{\lambda_4} + d_{\lambda_5} = 10, \qquad d_{\lambda_1}^2 + d_{\lambda_2}^2 + d_{\lambda_3}^2 + d_{\lambda_4}^2 + d_{\lambda_5}^2 = 24,$$

qui se simplifie en

$$d_{\lambda_4} + d_{\lambda_5} = 5, \qquad d_{\lambda_4}^2 + d_{\lambda_5}^2 = 13.$$

Nous obtenons une autre représentation irréductible de degré 3 et une représentation irréductible de degré 4
Il y a 7 partitions de 5. Par symétrie des tableaux de Young, on obtient déjà deux représentations de degré 1 (1 et ϵ, associées à $5 = 5$ et $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$), deux représentations de degré 4 (S_H, associée à $5 = 4 + 1$, et celle associé à $5 = 2 + 1 + 1 + 1$). Les représentations associées aux décompositions $5 = 3 + 2$ et $5 = 2 + 2 + 1$ ont même degré. En utilisant ces connaissances et les deux relations précédentes on obtient :

$$2d_{\lambda_3} + d_{\lambda_4} = 16, \qquad 2d_{\lambda_3}^2 + d_{\lambda_4}^2 = 86,$$

c'est-à-dire deux représentations de degré 5 et une de degré 6.