Partie I - Matrice jacobienne symétrique, antisymétrique

1) Soit $k \in [\![1, n]\!]$, la fonction f_k est de classe $\mathscr{C}^2$ donc d'après le théorème de Schwarz, pour tout i et j dans $[\![1, n]\!]$ et tout x de $\mathbb{R}^n$,

$$f_{i,j,k}(x) = \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial x_i} = f_{j,i,k}(x).$$

2) a) On suppose que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne $J_f(x)$ est antisymétrique, en particulier pour tout j et k dans $[\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j} = -\dfrac{\partial f_j}{\partial x_k}$. En dérivant cette égalité par rapport à la variable x_i on obtient que

$$f_{i,j,k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\right) = f_{i,k,j}.$$

b) Soit i, j et k dans $[\![1, n]\!]$, en utilisant alternativement les deux relations ci-dessus,

$$f_{i,j,k} = -f_{i,k,j} = -f_{k,i,j} = f_{k,j,i} = f_{j,k,i} = -f_{j,i,k} = -f_{i,j,k}.$$

De ce fait $\boxed{f_{i,j,k} = -f_{i,j,k} \text{ et donc } f_{i,j,k} = 0.}$[1]

c) On vient de voir que pour tout j et k dans $[\![1, n]\!]$, on a pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}\right) = 0$.
Cela signifie que la fonction $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}$ a toutes ses dérivées partielles nulles (et donc sa différentielle nulle). De ce fait, comme $\mathbb{R}^n$ est connexe par arc, la fonction $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_j}$ est constante sur $\mathbb{R}^n$. Cela signifie que la matrice jacobienne J_f est constante sur $\mathbb{R}^n$ (et antisymétrique). Notons $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ cette matrice.
Posons maintenant, $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ la fonction définie par $x \mapsto f(x) - Ax$. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ et sa matrice jacobienne en x vaut $J_f(x) - A = A - A = 0$. La fonction g est donc constante (par le même argument que ci-dessus) et donc, en posant $b = g(0)$, on a bien

$$f : x \mapsto Ax + b.$$

d) Soit f de classe $\mathscr{C}^2$. On vient de voir que si pour tout x de $\mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne $J_f(x)$ était antisymétrique alors f était de la forme $f : x \mapsto Ax + b$ avec $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$.
Réciproquement, soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$, d'après $I.A$, la fonction $f : x \mapsto Ax + b$ et sa matrice jacobienne en tout point $x \in \mathbb{R}^n$ vaut A et appartient donc à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

3) Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, on veut montrer que la matrice jacobienne $J_f(x)$ est symétrique pour tout x de $\mathbb{R}^n$ si et seulement s'il existe une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f_i = D_i g$.

— $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $f_i = D_i g$. D'après le théorème de Schwarz (la fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$), pour tout i, j dans $[\![1, n]\!]$,

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}.$$

De ce fait, la matrice jacobienne est symétrique.

1. On peut aussi voir ce résultat à l'aide de permutations. En effet si on note $\sigma = (1, 2)$ et $\tau = (2, 3)$. L'action de σ ne change pas le signe et l'action de τ revient à multiplier par -1. Maintenant, $\sigma\tau$ est le cycle $\gamma = (1, 2, 3)$. De ce fait, $(\sigma\tau)^3 = \gamma^3 = \mathrm{id}$ mais l'action de γ (et donc de γ^3) revient à multiplier par -1.

— $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose maintenant que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne $J_f(x)$ est symétrique, c'est-à-dire que pour i et j dans $[\![1,n]\!]$ alors $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$.

On pose alors (comme suggéré),

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & x & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 f_i(tx)\mathrm{d}t \end{array}$$

Vérifions que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $D_j g = f_j$.

Commençons par étudier juste la fonction $\varphi_i : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 f_i(tx)\mathrm{d}t$. On cherche à calculer sa dérivée partielle selon x_j en $x = (x_1, \ldots, x_n)$: $D_j\varphi_i(x)$. Pour cela on dérive (en 0) la fonction

$$\alpha \mapsto \varphi_i(x + \alpha e_j) = \int_0^1 f_i(tx_1, \ldots, tx_j + t\alpha, \ldots, t_n)\mathrm{d}t.$$

On peut appliquer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres.

— *i)* Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f_i(tx_1, \ldots, tx_j + t\alpha, \ldots, t_n)$ est continue sur $[0,1]$.

— *ii)* Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f_i(tx_1, \ldots, tx_j + t\alpha, \ldots, t_n)$ est intégrable sur $[0,1]$.

— *iii)* Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $\alpha \mapsto f_i(tx_1, \ldots, tx_j + t\alpha, \ldots, t_n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$\alpha \mapsto tD_j f_i(tx_1, \ldots, tx_j + t\alpha, \ldots, t_n)$$

— *iv-α)* Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto tD_j f_i(tx_1, \ldots, tx_j + t\alpha, \ldots, t_n)$ est continue sur $[0,1]$

— *iv-β)* Pour tout $t \in [0,1]$, la fonction $\alpha \mapsto tD_j f_i(tx_1, \ldots, tx_j + t\alpha, \ldots, t_n)$ est continue sur $\mathbb{R}$

— *iv-γ)* Hypothèse de domination locale : Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, la fonction $(t,\alpha) \mapsto tD_j f_i(tx_1, \ldots, tx_j + t\alpha, \ldots, t_n)$ est continue sur $[0,1] \times [a,b]$ qui est un segment. Elle est donc bornée. On peut donc poser une fonction φ constante.

D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, $\alpha \mapsto \varphi_i(x + \alpha e_j)$ est dérivable en 0 et on a donc

$$\varphi_i'(x) = \int_0^1 tD_j f_i(tx).$$

On en déduit finalement que

$$D_j g(x) = \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 tD_j f_i(tx)\mathrm{d}t + \int_0^1 f_j(tx)\mathrm{d}t.$$

Le dernier terme vient de la dérivation de x_j.

Maintenant,

$$\begin{aligned} D_j g(x) &= \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 tD_j f_i(tx)\mathrm{d}t + \int_0^1 f_j(tx)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t\left(\sum_{i=1}^n x_i D_j f_i(tx)\right)\mathrm{d}t + \int_0^1 f_j(tx)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 t\left(\sum_{i=1}^n x_i D_i f_j(tx)\right)\mathrm{d}t + \int_0^1 f_j(tx)\mathrm{d}t \text{ car } J_f \text{ symétrique} \\ &= \int_0^1 t\,(t \mapsto f_j(tx))'\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f_j(tx)\mathrm{d}t \\ &= [tf_j(tx)]_0^1 - \int_0^1 f_j(tx)\mathrm{d}t + \int_0^1 f_j(tx)\mathrm{d}t \text{ par intégration par parties} \\ &= f_j(x) \end{aligned}$$

On a obtenue l'égalité voulue [2].

2. On vient de démontrer le résultat classique en physique qui affirme qu'un champ de vecteurs de rotationnel nul dérive d'un potentiel scalaire

Partie II - Matrice jacobienne orthogonale

4) a) Soit i, j et k dans $[\![1,n]\!]^3$.

— Comme f est de classe $\mathscr{C}^2$, pour tout $p \in]\!]1,n[\![$, f_p est classe $\mathscr{C}^2$ et donc, d'après le lemme de Schwarz, $\dfrac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k} = \dfrac{\partial^2 f_p}{\partial x_k \partial x_j}$. On en déduit que

$$\alpha_{i,j,k} = \sum_{p=1} \frac{\partial f_p}{\partial x_i} . \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_k} = \sum_{p=1} \frac{\partial f_p}{\partial x_i} . \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_k \partial x_j} = \alpha_{i,k,j}.$$

— On utilise maintenant que pour tout x de $\mathbb{R}^n$, la matrice jacobienne $J_f(x)$ est orthogonale. De ce fait le coefficient ligne i et colonne k du produit ${}^tJ_f(x)J_f(x) = I_n$ est

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x) . \frac{\partial f_p}{\partial x_k}(x) = \delta_{ij}$$

cela vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. En particulier, cela ne dépend pas de x. De ce fait en dérivant cette relation par rapport à x_j on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f_p}{\partial x_i} . \frac{\partial f_p}{\partial x_k} \right) = 0 \quad &\iff \quad \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_j \partial x_i} . \frac{\partial f_p}{\partial x_k} + \sum_{p=1}^{n} \frac{\partial f_p}{\partial x_i} . \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_k \partial x_j} = 0 \\ &\iff \quad \alpha_{k,j,i} + \alpha_{i,j,k} = 0 \end{aligned}$$

On en déduit bien que $\alpha_{i,k,j} = -\alpha_{k,j,i} = -\alpha_{k,i,j}$.

b) On en déduit que pour tout i, j et k dans $[\![1,n]\!]^3$, $\alpha_{i,j,k} = 0$ en procédant comme en 2.b).

c) Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On considère la matrice jacobienne en x de la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$ que nous noterons $J_k(x)$. Le coefficient ligne i et colonne j de la matrice ${}^tJ_k(x)J_f(x)$ est

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial^2 f_p}{\partial x_i \partial x_k}(x) . \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \alpha_{j,i,k}(x) = 0.$$

On a donc ${}^tJ_k(x)J_f(x) = 0$ ce qui implique que ${}^tJ_k(x)$ est nulle car $J_f(x)$ est inversible car orthogonale. Finalement, $J_k(x)$ est nulle ce qui signifie que pour tout i et p dans $[\![1,n]\!]$, $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\partial f_p}{\partial x_i}\right) = 0$. On peut alors conclure comme en 2.c) à la différence que cette fois A est orthogonale et pas antisymétrique.

5) Une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, elle vérifie la condition ($\mathscr{P}$) si et seulement si f était de la forme $f : x \mapsto Ax + b$ avec A orthogonale et $b \in \mathbb{R}^n$. Le sens direct $\boxed{\Rightarrow}$ est démontré à la question 4) et le sens inverse $\boxed{\Leftarrow}$ se démontre comme en ci-dessus.

6) On procède par double implication.

— $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose que f vérifie $\mathscr{P}$. De ce fait, on a $f : x \mapsto Ax + b$ avec A orthogonale et $b \in \mathbb{R}^n$. Soit g une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(x)) . \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

Si bien qu'en redérivant par rapport à x_i on obtient,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2(g \circ f)}{\partial x_i^2}(x) &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_p \partial x_j}(f(x)) . \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial g}{\partial x_j}(f(x)) . \frac{\partial^2 f_j}{\partial x_i^2}(x) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_p \partial x_j}(f(x)) . \frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) \right) \end{aligned}$$

On a en effet vu que sous la condition $\mathscr{P}$, les fonctions $\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial x_i^2}$ étaient nulles. On en déduit la valeur du laplacien de $g \circ f$,

$$\Delta_{g\circ f} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial^2 g}{\partial x_p \partial x_j}(f(x)).\frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\frac{\partial^2 g}{\partial x_p \partial x_j}(f(x))\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_p}{\partial x_i}(x)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\right).$$

On reconnait que le terme dans la parenthèse est le produit scalaire des lignes j et p de la matrice jacobienne A de f qui est supposée orthogonale. Ce terme est nul si $j \neq p$ et vaut 1 si $j = p$. On en déduit alors

$$\Delta_{g\circ f} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_j}(f(x)) = \Delta_g \circ f.$$

— $\boxed{\Leftarrow}$ On suppose maintenant que pour toute fonction g de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, on a $\Delta_{g\circ f} = \Delta_g \circ f$. On veut montrer que f vérifie $\mathscr{P}$.
En particulier si on applique cela à la fonction $g : x \mapsto x_j$, on obtient, en reprenant le calcul précédent que

$$\Delta_{g\circ f} = \Delta_{f_j}$$

Mais comme dans ce cas, Δ_g est nulle, on obtient que $\Delta_{f_j} = 0$.
Maintenant pour $(j_0, p_0) \in [\![1, n]\!]^2$, on considère la fonction $g : x \mapsto x_{j_0} x_{p_0}$.
Commençons par étudier le cas où $j \neq p$, en reprenant le calcul ci-dessus et en utilisant que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_j} = \delta_{j,j_0}\delta_{p,p_0}$ où δ est le symbole de Kronecker, on obtient que

$$\Delta_{g\circ f} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_{j_0}}{\partial x_i}\frac{\partial f_{p_0}}{\partial x_i}$$

Comme de plus, dans ce cas, $\Delta_g = 0$ on obtient que le produit scalaire de deux lignes distinctes de la matrice jacobienne de f fait 0.
On fait alors de même pour $j_0 = p_0$, dans ce cas, $\Delta_g = 1$ et donc on obtient bien que la matrice jacobienne de f est orthogonale. La propriété $\mathscr{P}$ est vérifiée.