Problème de Dirichlet

Si A est une partie d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$, on note $\mathscr{C}(A)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des applications continues de A dans $\mathbb{C}$. Les notations $D, \bar{D}$ et T désignent respectivement

- le disque ouvert $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$
- le disque fermé $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \leqslant 1\}$
- le cercle $T = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$.

À une fonction $f \in \mathscr{C}(T)$ quelconque on associe

- les coefficients de Fourier
$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{it}\right) e^{-int} \, \mathrm{d}t \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$$
- la fonction $g_f : D \to \mathbb{C}$ définie par la formule suivante, dont l'existence sera traitée dans la question 1):
$$g_f(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \bar{z}^n$$
où $\bar{z}$ désigne le complexe conjugué de z;
- la fonction $G_f : \bar{D} \to \mathbb{C}$ définie par
$$G_f(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in T \\ g_f(z) & \text{si } z \in D \end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p_n et q_n les fonctions de $\mathscr{C}(T)$ définies par

$$\begin{matrix} p_n(z) = z^n \\ q_n(z) = \bar{z}^n \end{matrix} \quad (\forall z \in T)$$

Soit X une partie non vide de $\mathbb{C}$ et f une fonction bornée sur X on note

$$||f||_{\infty,X} = \mathsf{Sup}_{z \in X} |f(z)|$$

On **admet** le théorème de Weierstrass trigonométrique :

Théorème : Soit $\mathscr{P}(T)$ le sous espace vectoriel de $\mathscr{C}(T)$ engendré par $\{p_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{q_n; n \in \mathbb{N}\}$. Toute fonction de $\mathscr{C}(T)$ est limite uniforme d'une suite d'éléments de $\mathscr{P}(T)$.

Le but du problème est de caractériser de différentes manières le prolongement G_f de f à $\bar{D}$.

A - Prolongement harmonique

Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$ on note $\tilde{U} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x+iy \in U\right\}$. Pour toute fonction $u : U \to \mathbb{C}$, on note $\widetilde{u} : \widetilde{U} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par la formule $\widetilde{u}(x,y) = u(x+iy)$. La fonction u est dite de classe $\mathscr{C}^2$ si $\tilde{u}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ au sens des fonctions de deux variables réelles. On note alors Δu la fonction définie sur U par

$$\Delta u(x+iy) = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}(x,y)$$

Dans cette partie, on fixe une fonction $f \in \mathscr{C}(T)$ et on se propose de montrer que G_f est l'unique fonction $G : \bar{D} \to \mathbb{C}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

(a1) la restriction de G à T coïncide avec f;

(a2) G est continue sur $\bar{D}$;

(a3) la restriction G à D est de classe $\mathscr{C}^2$ et $\Delta G(z) = 0$ pour tout $z \in D$.

On va d'abord montrer que G_f vérifie ces conditions. La condition (a1) est évidemment vérifiée.

1) a) Justifier que la fonction f est bornée sur T.
   b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $|c_n(f)| \leqslant ||f||_{\infty,T}$.
   c) En déduire que les deux séries qui entrent dans la définition de $g_f(z)$ sont convergentes pour tout $z \in D$.

Soit $S(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence R supérieur ou égal à 1

2) Au moyen d'une dérivation terme à terme d'une série de fonctions de variable réelle, justifier que l'application $\widetilde{S} : \widetilde{D} \to \mathbb{C}$ admet une dérivée partielle par rapport à x qui est continue sur $\widetilde{D}$, et exprimer $\frac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x,y)$ sous la forme de la somme d'une série.

3) a) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D.
   On pourra procéder comme ci-dessus pour établir l'existence et la continuité des dérivées partielles de $\widetilde{S}$. On pourra être succinct dans la rédaction mais il ne faudra pas oublier de vérifier précisément les hypothèses de domination.
   b) Déterminer $\Delta S(z)$ pour tout $z \in D$.

4) a) Montrer qu'il existe des fonctions u et v qui sont des sommes de séries entières de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 telles que

$$\forall z \in D, g_f(z) = u(z) + \overline{v(z)}$$

   b) En déduire que g_f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D et que $\Delta g_f(z) = 0$ pour tout $z \in D$.

On fixe $z \in D$, et on note $P_z(t) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\right)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

5) a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$P_z(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(ze^{-it})^n + \sum_{n=1}^{+\infty}(\overline{z}e^{it})^n$$

   b) En tenant compte de la définition des c_n dans l'expression de $g_f(z)$, montrer que

$$g_f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(e^{it}\right) P_z(t)\mathrm{d}t$$

6) a) Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $c_k(p_n)$ et $c_k(q_n)$.

b) Déterminer g_f pour $f = p_n$ et $f = q_n$, où $n \in \mathbb{N}$.

En déduire la valeur de l'intégrale $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_z(t)\mathrm{d}t$.

c) Étudier le signe de $P_z(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

7) a) Soit $h \in \mathscr{C}(T)$, montrer que

$$\forall z \in D, |g_f(z) - g_h(z)| \leqslant ||f - h||_{\infty,T}$$

b) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{C}(T)$ qui converge uniformément vers f sur T, alors G_{f_n} converge uniformément vers G_f sur $\bar{D}$.

8) Montrer que G_f est continue sur $\bar{D}$.

On pourra utiliser le théorème admis dans le préambule.

On se donne maintenant une fonction G vérifiant les conditions (a1), (a2) et (a3) et on se propose de démontrer que $G = G_f$.

9) On suppose dans cette question que f est la fonction nulle et que G est à valeurs réelles. Soit $\varepsilon > 0$ et $u : \bar{D} \to \mathbb{R}$ définie par $u(z) = G(z) + \varepsilon|z|^2$.

a) On note $h : z \mapsto |z|^2$. Calculer Δh et montrer que $\Delta u(z) > 0$ pour tout $z \in D$.

b) Justifier qu'il existe un point $z_0 = x_0 + iy_0 \in \bar{D}$ où u atteint son maximum.

c) Montrer que $z_0 \notin D$ en considérant, dans le cas contraire, le signe des dérivées partielles secondes $\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(x_0, y_0)$ et $\dfrac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y^2}(x_0, y_0)$.

d) En déduire que $u(z) \leqslant \varepsilon$ pour tout $z \in \bar{D}$

10) Conclure dans le cas particulier de la question précédente, puis dans le cas général. (On pourra d'abord étendre la conclusion au cas où f est nulle mais G est à valeurs complexes.)

B. Deux applications

Première application. On considère la fonction G définie sur $\bar{D}$ par $G(x + iy) = e^x \cos y$.

11) a) Montrer que G vérifie la condition (a3).

b) Justifier que pour tout $z \in \mathbb{C}, G(z) = \mathrm{Re}(e^z)$

c) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Déduire de ce qui précède la valeur de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\cos t}\cos(\sin t)\cos(nt)\mathrm{d}t.$$

On pourra interpréter l'intégrale à l'aide de $c_n(G_{|T})$ et $c_{-n}(G_{|T})$.

Deuxième application. Soit $u : U \to \mathbb{C}$ une application continue définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}$. Si $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$, on note $D(a, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| < R\}$ et $\bar{D}(a, R) = \{z \in \mathbb{C}; |z - a| \leqslant R\}$.

12) Montrer que u est de classe $\mathscr{C}^2$ et telle que $\Delta u = 0$ sur U si et seulement si, pour tout disque fermé $\bar{D}(a, R)$ contenu dans U et pour tout $z \in D(a, R)$, on a

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u\left(a + R.e^{it}\right) P_{\frac{z-a}{R}}(t)\mathrm{d}t.$$

On pourra considérer la fonction $z \mapsto u(a + Rz)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n : U \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $\Delta u_n = 0$ sur U.

13) Déduire de la question précédente que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction u, alors u est également de classe $\mathscr{C}^2$ et telle que $\Delta u = 0$ sur U.

C. Propriétés duales

Dans cette partie, on fixe $z \in D$ et on considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi_z : \mathscr{C}(T) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto g_f(z) \end{aligned}$$

où $\mathscr{C}(T)$ est muni de la norme $||.||_{\infty,T}$ définie en préambule.

Pour toute application $\varphi : \mathscr{C}(T) \to \mathbb{C}$, on considère les quatre propriétés suivantes :

(c1) φ est une forme $\mathbb{C}$-linéaire et continue;

(c2) $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi\left(p_n\right) = z^n$;

(c3) $\forall n \in \mathbb{N}, \varphi\left(q_n\right) = \bar{z}^n$;

(c4) $\forall f \in \mathscr{C}(T), |\varphi(f)| \leqslant ||f||_{\infty,T}$.

14) Montrer que φ_z vérifie ces quatre propriétés.

15) Montrer que si φ vérifie les conditions (c1), (c2) et (c3), alors $\varphi = \varphi_z$.

Dans la suite de cette partie, on se donne $\varphi : \mathscr{C}(T) \to \mathbb{C}$ vérifiant les conditions (c1), (c2) et (c4), et on se propose de démontrer que $\varphi = \varphi_z$.
Dans les deux questions suivantes, on se donne $\lambda \in \mathbb{R}$ et on considère une fonction $f \in \mathscr{C}(T)$ à valeurs réelles positives ou nulles. Soit $h \in \mathscr{C}(T)$ définie par la formule $h(z) = 2f(z) - ||f||_{\infty,T} + i\lambda$ pour tout $z \in T$.

16) Calculer $||h||^2_{\infty,T}$ en fonction de $||f||_{\infty,T}$ et de λ.

17) En étudiant $|\varphi(h)|^2$, montrer que $\varphi(f) \in \mathbb{R}$ puis que $\varphi(f) \geqslant 0$.

18) En déduire que $\varphi(\bar{f}) = \overline{\varphi(f)}$ pour tout $f \in \mathscr{C}(T)$, et conclure.