I - Séries numériques

1. (CCINP) EXERCICE 5 analyse

   (a) On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

      i. **Cas** $\alpha \leqslant 0$
      En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

      ii. **Cas** $\alpha > 0$
      Étudier la nature de la série.
      Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.

   (b) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

2. (CCINP) EXERCICE 6 analyse
   Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

   (a) Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.
   Indication : écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

   (b) Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

3. (ENSSAT) Déterminer la nature de la série de terme général $\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$ en fonction de a et de b.

4. (Mines-Telecom) Étude de la série $\sum \frac{n^{\alpha}}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$ en fonction de $a > 0$ et de $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. (Mines-Telecom) On pose
$$S_n = \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2} \frac{1}{\sqrt{k}}$$
   Déterminer la limite de (S_n).

6. (Mines-Ponts) Déterminer la nature des séries
$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln(n))}} \quad ; \quad \sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(n)}}$$

7. (Mines-Ponts)

   (a) Existe-t-il une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k = k$?

   (b) Existe-t-il une suite de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k = \frac{1}{k^2}$?

II - Intégration et intégrales à paramètre

1. (CCINP) EXERCICE 25 analyse

   (a) Démontrer que, pour tout entier n, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+t^n e^{-t}}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

   (b) On pose $u_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2+t^n e^{-t}}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

2. (CCINP) EXERCICE 29 analyse
   On pose : $\forall\, x \in]0,+\infty[$ et $\forall\, t \in\,]0,+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

   (a) Démontrer que, pour tout $x \in\,]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

   On pose alors, $\forall\, x \in]0,+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.

   (b) Pour tout $x \in]0,+\infty[$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.

   (c) Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$ et exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

3. (CCINP) EXERCICE 26 analyse
   Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$.

   (a) Justifier que I_n est bien définie.

   (b) Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et déterminer sa limite.

   (c) La série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n I_n$ est-elle convergente ?

4. (CCP)

   (a) Montrer que pour tout $x > 1$, $t \mapsto \frac{e^{-xt}\,\mathrm{sh}\,t}{t}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
   On pose $g : x \in]1,\infty[\mapsto \int_0^\infty \frac{e^{-xt}\,\mathrm{sh}\,t}{t}dt$

   (b) Montrer que g est dérivable et calculer g'

   (c) Déterminer la limite de g à l'infini.

   (d) En déduire g

5. (Mines - Telecom) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable sur $[0,+\infty[$ mais que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$ converge.

6. (Mines - Telecom)

   (a) Soit $x \in\,]0,+\infty[$. Montrer que $t \mapsto \frac{e^{-tx}}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

   (b) Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\,dt$. Montrer que F est $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[$.

   (c) Calculer $F''(x) + F(x)$ pour tout $x > 0$.

7. (Mines - Ponts) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-x)\ln x dx$

III - Réduction des endomorphismes

1. (CCINP) EXERCICE 59 algèbre
   Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n.
   Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.
   (a) Démontrer que f est bijectif de deux manières :
      i. sans utiliser de matrice de f,
      ii. en utilisant une matrice de f.
   (b) Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.
   Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?
   (c) f est-il diagonalisable ?
2. (CCINP) EXERCICE 60 algèbre
   Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.
   (a) Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
   (b) f est-il surjectif ?
   (c) Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
   (d) A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?
3. (CCINP) EXERCICE 64 algèbre
   Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n.
   (a) Démontrer que : $E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f \Longrightarrow \mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2$.
   (b) i. Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longleftrightarrow \mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} f^2$.
      ii. Démontrer que : $\mathrm{Im} f = \mathrm{Im} f^2 \Longrightarrow E = \mathrm{Im} f \oplus \mathrm{Ker} f$.
4. (CCINP)
   Soit u de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dans lui même défini par $u : X \mapsto -X + \mathrm{tr}(X) I_n$.
   (a) Déterminer μ_u le polynôme minimal de u. En déduire que u est diagonalisable.
   (b) Déterminer les sous-espaces propres de u.
5. (TPE-EIVP) Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
   On pose $r = p + q$.
   (a) Montrer que r est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
   (b) Dans le cas où r est un projecteur, montrer que

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(r) &= \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Im}(q) \\ \ker(r) &= \ker(p) \cap \ker(q) \end{aligned}$$

6. (Mines - Telecom) Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ne contenant aucune matrice inversible.
   (a) Trouver un supplémentaire simple de H.
   (b) Montrer que H contient l'ensemble des matrices nilpotentes.
   (c) Montrer que H n'existe pas si $n \geqslant 2$.
7. (Mines - Ponts) Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note P son polynôme caractéristique. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que z n'est pas valeur propre de M. Montrer que $\mathrm{tr}((zI_n - M)^{-1}) = \frac{P'(z)}{P(z)}$.
8. (Centrale 1) Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k)$
   (a) Les matrices A et B sont-elle nécessairement semblables ?
   (b) Traduire par une condition sur les valeurs propres de A et B l'hypothèse de l'exercice.
   (c) Montrer que $\chi_A = \chi_B$.

IV - Suites et séries de fonctions

1. (CCINP) EXERCICE 9 analyse

   (a) Soit X un ensemble, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.

   (b) On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}\cos(\sqrt{n}x)$.

      i. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

      ii. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?

      iii. Soit $a>0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a,+\infty[$?

      iv. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

2. (CCINP) EXERCICE 11 analyse

   (a) Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.

   Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X.

   (b) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$.

      i. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

      ii. Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a,+\infty[$ (avec $a>0$), puis sur $]0,+\infty[$.

3. (CCINP) EXERCICE 14 analyse

   (a) Soit a et b deux réels donnés avec $a<b$.
   Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs réelles.
   Démontrer que si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers f, alors la suite $\left(\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

   (b) Justifier comment ce résultat peut être utilisé dans le cas des séries de fonctions.

   (c) Démontrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$.

4. (CCINP) EXERCICE 16 analyse
   On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in[0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

   On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

   (a) Démontrer que S est dérivable sur $[0, 1]$.
   (b) Calculer $S'(1)$.

5. (CCINP)
   (a) Montrer la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^n}$.
   (b) On pose $f_n(t) = \dfrac{t^n(\ln t)^n}{n!}$ pour n entier et $t > 0$.
      i. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement et donner sa somme.
      ii. Montrer que f_n est intégrable sur $]0, 1]$ pour tout entier n.
      iii. Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout n entier.
   (c) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 t^t\,\mathrm{d}t$.

6. (CCINP)
   Soit $\alpha > 0$. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ avec $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^{2\alpha}+x^2}$.
   (a) Soit $\alpha > \frac{1}{2}$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
   (b) Soit $\alpha > 0$. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
   (c) Soit $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer ensuite que l'on a :
   $$\int_0^1 S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \arctan\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$
   (d) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

7. (Mines-Ponts) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

8. (Mines-Ponts) On pose $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-x\sqrt{n}}}{n\sqrt{n}}$
   (a) Donner le domaine de définition de f. On le note D.
   (b) Montrer que f est continue sur D.
   (c) La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur D ?

V - Familles sommables et probabilités

1. (CCINP) EXERCICE 96 probabilités
   Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, de loi de probabilité donnée par : $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = p_n$.
   La fonction génératrice de X est notée G_X et elle est définie par $G_X(t) = E\left[t^X\right] = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.
   (a) Prouver que l'intervalle $]-1, 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de G_X.
   (b) Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $S = X_1 + X_2$. Démontrer que $\forall t \in]-1,1\left[, G_S(t) = G_{X_1}(t) G_{X_2}(t)\right.$:
      i. en utilisant le produit de Cauchy de deux séries entières.
      ii. en utilisant uniquement la définition de la fonction génératrice par $G_X(t) = E\left[t^X\right]$.

   Remarque : on admetra, pour la question suivante, que ce résultat est généralisable à n variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (c) Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0 , deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2 . Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n tirages successifs, avec remise, d'une boule dans ce sac. On note S_n la somme des numéros tirés. Soit $t \in]-1, 1[$. Déterminer $G_{S_n}(t)$ puis en déduire la loi de S_n.
2. (CCINP) EXERCICE 98 probabilités
   Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
   On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0, 1[$).
   Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.
   (a) Donner la loi de X. Justifier.
   (b) La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
      i. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k | X = i)$.
      ii. Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
      Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.
      iii. Déterminer l'espérance et la variance de Z.
3. (CCINP) EXERCICE 108 probabilités
   Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi du couple (X, Y) est donnée par :
   $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P((X = i) \cap (Y = j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\, 2^{i+1} j!}$
   (a) Déterminer les lois de X et de Y.
   (b) i. Prouver que $1 + X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.
      ii. Déterminer l'espérance et la variance de Y.
   (c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
   (d) Calculer $P(X = Y)$.

4. (Mines-Ponts)
   Une première personne reçoit un bout de papier avec un signe + ou − (de manière équiprobable). Elle transmet un bout de papier avec un + ou − à une seconde personne, avec une probabilité p de changer de signe, et une probabilité $q = 1 - p$ de conserver le même signe. etc...
   Après avoir changé ou non de signe, la $n^{ème}$ personne transmet son bout de papier à un juge.
   Quelle est la probablité que le premier joueur ait reçu un + sachant que le juge a reçu un + ?
5. (Mines-télécom) On tire au hasard un nombre entier strictement positif. On suppose que la probabilité d'obtenir n est $\frac{1}{2^n}$. Lorsque $k \in \mathbb{N}^*$, on pose A_k l'événement « n est multiple de k ».
   (a) Vérifier qu'il s'agit bien d'une probabilité sur $\mathbb{N}^*$.
   (b) Calculer $P(A_k)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Pour tous p et q, entiers strictement supérieurs à 1 distincts, que dire des événements A_p et A_q ?
6. (Mines-télécom) Soit $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$. On note $M = (X_iX_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
   (a) Donner les lois de $\mathrm{rg}(M)$ et de $\mathrm{Tr}(M)$.
   (b) Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projecteur ?
7. (Mines-télécom)
   Une puce se déplace sur 3 cases C_1, C_2, C_3. Si la puce se trouve en C_1 ou C_2 au temps n, elle a équiprobabilité de se retrouver sur chaque case au temps $n+1$. Si la puce se trouve en C_3 au temps n, elle y reste. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :
   E_n : " La puce se trouve en C_1 au temps n " ;
   F_n : " La puce se trouve en C_2 au temps n " ;
   G_n : " La puce se trouve en C_3 au temps n " ;
   $u_n = P(E_n)$, $v_n = P(F_n)$, $w_n = P(G_n)$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.
   (a) Exprimer u_{n+1}, v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de u_n, v_n et w_n.
   (b) Déterminer une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.
   (c) A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
   (d) Exprimer X_n sous forme matricielle.
   (e) Énoncer le théorème de continuité croissante.
   (f) Calculer $P\left(\bigcup_{n\geqslant 1} G_n\right)$.
8. (CCINP) :
   On considère une soirée mondaine de n couples où chaque cavalier choisit une cavalière au hasard. On note E_k l'événement « k cavaliers dansent avec leur cavalière attitrée »pour $k \in [\![1, n]\!]$. On note F_n l'événement « aucun des n cavaliers ne dansent avec sa cavalière ». On pose alors $p_n = p(F_n)$.
   (a) i. Montrer que pour $n \geqslant 3$, $np_n - (n-1)p_{n-1} - p_{n-2} = 0$.
   ii. Montrer que pour $n \geqslant 1$,
   $$p_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

   iii. Calculer $P(E_k)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ en fonction des p_i.

   iv. Qu'obtient-on quand $n \longrightarrow +\infty$.

(b) On définit alors pour $k \in [\![1, n]\!]$, la variable X_k qui vaut 1 si le k-ième cavalier danse avec sa cavalière attitrée et 0 sinon.

   i. Donner la loi de X_k.

   ii. Espérance et variance de X_k.

   iii. Les variables X_k et $X_{k'}$ sont-elles indépendantes.

(c) On pose Y_n la variable qui compte le nombre de couples réunis.

   i. Loi de Y_n.

   ii. Espérance et variance de Y_n.

VI - Algèbre générale

1. (CCINP) EXERCICE 86 algèbre

   (a) Soit $(a, b, p) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que si $p \wedge a = 1$ et $p \wedge b = 1$, alors $p \wedge (ab) = 1$.

   (b) Soit p un nombre premier.

      i. Prouver que $\forall k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\binom{p}{k} k!$ puis que p divise $\binom{p}{k}$.

      ii. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n^p \equiv n \mod p$.
      Indication : Procéder par récurrence.

      iii. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

2. (CCINP) EXERCICE 94 algèbre

   (a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

   (b) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux.
   Soit $c \in \mathbb{N}$.
   Prouver que : $(a|c$ et $b|c) \Longleftrightarrow ab|c$.

   (c) On considère le système (S) : $\begin{cases} x \equiv 6 & [17] \\ x \equiv 4 & [15] \end{cases}$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.

      i. Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.

      ii. *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).

3. (Mines-télécom) On considère deux entiers naturels non nuls n et p.

   (a) On suppose que p divise n, montrer que $X^p - 1$ divise $X^n - 1$.

   (b) On note d le pgcd de n et p, calculer le pgcd et $X^n - 1$ et $X^p - 1$.

4. (Mines-télécom) On note P_n l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\{0, 1\}$, tel qu'il n'y ait qu'un seul coefficient non nul par ligne et par colonne. Montrer que toute matrice de P_n est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
   Indication : On montrera que P_n est un groupe.

5. (Centrale 1) On pose $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier et impair, $\mathscr{C} = \left\{x^2 \ / \ x \in \mathbb{F}_p \backslash \{\overline{0}\}\right\}$.

   (a) i. Que dire de la structure algébrique de $\mathbb{F}_p$ et de $\mathscr{C}$?

      ii. Expliciter $\mathscr{C}$ pour $p = 11$.

   (b) Soit P un polynôme de degré strictement inférieur à d et à coefficients entiers, avec $d \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{Z}$ tels que $\forall i \in [[1, d]],\ p \mid P(a_i)$ avec les a_i distincts modulo p. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ p \mid P(n)$.

   (c) Montrer que $\mathscr{C} = \left\{x \in \mathbb{F}_p \ / \ x^{\frac{p-1}{2}} = \overline{1}\right\}$.

6. (Mines-télécom)
   Soit A, B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ tel que :

   (a) En utilisant une expression général de A^{-1}, trouver une condition sur $\det(A)$ pour que A^{-1} existe et soit dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$.

(b) On suppose que $\det(A)$ et $\det(B)$ sont non nuls et que $\det(A)$ est premier avec $\det(B)$. Montrer qu'il existe U, V dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z})$ tel que $U.A + V.B = I_n$.

7. (Navale)
   Soit $\varphi(n)$ le nombre de générateurs de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

   (a) Montrer que si H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$, il existe a diviseur de n tel que $H =< \overline{a} >$ où $\overline{a} = a + n\mathbb{Z}$ est la classe de congruence de a dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

   (b) Montrer que si d divise n, il existe un unique sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ d'ordre(cardinal) d.

   (c) Justifier que si d divise n, le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ possède exactement $\varphi(d)$ éléments d'ordre d.

   (d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{d|n} \varphi(d) = n$.

   (e) Ecrire deux fonction Python, l'une récursive et l'autre non récursive, qui chacune calcule $\varphi(n)$.

8. (Mines-télécom)

   (a) Quels sont les inversibles de l'anneau $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +, \times)$? Le démontrer.

   (b) Quel est l'ordre de $\overline{9}$ dans $(\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}, +)$?

   (c) Donner un anneau A isomorphe à $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$.

   (d) Le groupe $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}, +)$ est-il isomorphe au groupe $((\mathbf{Z}/12\mathbf{Z})^{\times}, \times)$?