

Table des matières

1	Séries numériques	7
1	Généralités	8
1.1	Définitions	8
1.2	Propriétés	9
1.3	Lien suite-série	10
1.4	Divergence grossière	11
2	Séries de référence	12
2.1	Séries géométriques	12
2.2	Séries de Riemann	12
2.3	Série exponentielle	13
2.4	Exemples de calculs de sommes	14
3	Séries à termes positifs	15
3.1	Généralités	16
3.2	Théorème de comparaison par inégalités pour les séries à termes positifs	16
3.3	Rappels sur les relations de comparaison	17
3.4	Théorème de comparaison par équivalents pour les séries à termes positifs	19
3.5	Règle de d'Alembert	20
4	Séries absolument convergentes	21
4.1	Définition	21
4.2	Applications aux séries dont le terme général n'a pas nécessairement un signe constant	22
5	Comparaison séries - intégrales	24
5.1	Généralités	24
5.2	Exemples et applications	25
6	Séries alternées	26
6.1	Généralités	26
6.2	Etude du reste et de la somme	27
7	Sommation des relations de comparaison pour les séries à termes positifs	28
7.1	Sommation des relations de comparaison pour les séries à termes positifs	28
7.2	Applications classiques	30
2	Algèbre linéaire et éléments propres	32
1	Rappels	33
1.1	Définitions	33
1.2	Familles de vecteurs	33
1.3	Rang d'une application linéaire	36
2	Rappels sur les matrices	37
2.1	Changements de bases	37
2.2	Matrices semblables	38
2.3	Trace	38

3	Formes linéaires et hyperplans	39
3.1	Changement de bases	39
3.2	Bases duales et formes coordonnées	40
3.3	Formes linéaires et hyperplans	41
4	Compléments en algèbre linéaire	42
4.1	Somme	42
4.2	Parties stables	44
4.3	Calcul par blocs	46
4.4	Calculs par blocs et déterminants	47
5	Éléments propres d'un endomorphisme	49
5.1	Définition	50
5.2	Sous-espaces propres	52
6	Éléments propres d'une matrice	54
6.1	Définition	54
6.2	Endomorphismes et matrices diagonalisables	56
3	Intégration	59
1	Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, b[$	59
1.1	Rappels et définition	60
1.2	Propriétés	64
1.3	Théorème de comparaison pour les fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a, b[$	65
1.4	Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, b[$	66
1.5	Comparaison et fonctions de référence	68
2	Intégration sur un intervalle quelconque	69
2.1	Intervalle de la forme $]a, b]$	69
2.2	Intégration sur un intervalle ouvert	72
2.3	Propriétés de l'intégrale	73
2.4	Méthodes de calculs	75
2.5	Intégration des relations de comparaisons	78
3	Les théorèmes de Lebesgue	81
3.1	Limite (simple) d'une suite de fonctions et d'une série de fonctions	81
3.2	Interversion de \lim et \int	82
3.3	Théorème de convergence dominée	83
3.4	Théorème de convergence dominée - Cas continu	85
3.5	Intégration terme à terme d'une somme d'une série de fonctions	85
4	Polynôme caractéristique et réduction	88
1	Polynôme caractéristique	88
1.1	Polynôme caractéristique d'une matrice carrée	88
1.2	Polynôme caractéristique d'un endomorphisme	90
1.3	Multiplicités	91
1.4	Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire	92
1.5	Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit	92
2	Matrices et endomorphismes trigonalisables	94
2.1	Définitions	94
2.2	Critère de trigonalisabilité	94
3	Matrices et endomorphismes nilpotents	98
3.1	Définitions	98
3.2	Critère de nilpotence	100
5	Suites et séries de fonctions	101
1	Suites de fonctions	101
1.1	Convergence simple et convergence uniforme	101
1.2	Norme infinie	104
1.3	Quelques méthodes	106

2	Continuité et double limite	108
2.1	Continuité	108
2.2	Théorème de la double limite	109
3	Intégration et dérivation	111
3.1	Intégration	111
3.2	Dérivation	114
4	Séries de fonctions	115
4.1	Convergence	116
4.2	Continuité, intégration et dérivation	118
4.3	Exemple d'étude d'une fonction définie par une série	121
5	Approximation uniforme	123
5.1	Fonctions en escalier	123
5.2	Théorème de Weierstrass	123
6	Dénombrabilité et familles sommables	125
1	Ensembles dénombrables	125
1.1	Définitions	125
1.2	Propriétés et exemples	127
2	Familles sommables	129
2.1	Familles sommables de réels positifs	129
2.2	Familles sommables de nombres complexes	134
2.3	Produit de Cauchy	139
7	Probabilités	141
1	Espaces probabilisés	141
1.1	Tribus	141
1.2	Probabilités	142
2	Propriétés élémentaires des probabilités	144
2.1	Continuité	144
2.2	Événements négligeables, presque sûrs	146
3	Indépendance et probabilités conditionnelles	147
3.1	Probabilités conditionnelles	147
3.2	Événements indépendants	150
4	Variables aléatoires discrètes	152
4.1	Généralités	152
4.2	Couples de variables aléatoires et vecteurs aléatoires	154
4.3	Couples et familles de variables aléatoires indépendantes	156
5	Lois usuelles	159
5.1	Loi uniforme	159
5.2	Loi de Bernoulli et loi binomiale	160
5.3	Loi géométrique	160
5.4	La loi de Poisson	161
8	Polynôme minimal et réduction	163
1	Algèbres	164
1.1	Définition	164
1.2	Sous-algèbre et morphismes d'algèbre	164
2	Polynômes d'endomorphismes et de matrices	166
2.1	Polynômes de matrices	166
2.2	Polynômes d'endomorphismes	167
3	Compléments d'algèbre	168
3.1	Idéaux d'un anneau commutatif	168
3.2	Plus grand commun diviseur	171
3.3	Algorithme d'Euclide	174
3.4	Généralisation à n polynômes	175

4	Polynômes annulateurs	176
4.1	Définitions	176
4.2	Polynôme minimal	177
4.3	Polynômes annulateurs et valeurs propres	179
4.4	Théorème de Cayley-Hamilton	180
4.5	Calcul de puissances	180
5	Critère de diagonalisabilité	182
5.1	Décomposition des noyaux	182
5.2	Polynômes annulateurs et diagonalisabilité	184
5.3	Endomorphismes annulés par un polynôme scindé	186
6	Compléments et applications	187
6.1	Influence du corps de base	187
6.2	Calculs de puissances	188
6.3	Commutant	188
6.4	Décomposition de Dunford	189
6.5	Racines carrées	189
6.6	Sous-espaces stables	190
9	Espaces vectoriels normés I	191
1	Normes	191
1.1	Définition	191
1.2	Exemples de normes	192
1.3	Distance associée à une norme	198
1.4	Boules	199
1.5	Parties, suites et fonctions bornées	200
1.6	Normes équivalentes	201
2	Exemple de normes équivalentes	202
2.1	Sur \mathbb{K}^n	202
2.2	Sur les espaces de fonctions	204
3	Suites à valeurs dans un espace vectoriel normé	205
3.1	Convergence	205
3.2	Propriétés	208
3.3	Suites extraites et valeurs d'adhérence	210
4	Applications linéaires lipschitziennes	211
4.1	Définitions	211