1. Equivalents

Définition

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose qu'elles ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

1. *On dit que (u_n) et (v_n) sont équivalentes et on note $(u_n) \sim (v_n)$ si $\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1$.*
2. *On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) et on note $(u_n) = o(v_n)$ si $\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 0$.*
3. *On dit que (u_n) est dominée par (v_n) et on note $(u_n) = O(v_n)$ si $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée.*

Remarque : L'hypothèse de non annulation à partir d'un certain rang et juste une hypothèse technique qui sera vérifiée dans la très grande majorité des cas étudiés. Elle sert à définir la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ à partir d'un certain rang. On peut cependant traiter le cas général en introduisant une suite (ε_n) qui va « jouer le rôle » de la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$. Plus précisément :

— Les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes s'il existe une suite (ε_n) tendant vers 1 telle que pour tout entier n, $u_n = v_n \times \varepsilon_n$.

— On a $u_n = o(v_n)$ s'il existe une suite (ε_n) tendant vers 0 telle que pour tout entier n, $u_n = v_n \times \varepsilon_n$.

— On a $u_n = O(v_n)$ s'il existe une suite (ε_n) bornée telle que pour tout entier n, $u_n = v_n \times \varepsilon_n$.

Proposition (Propriétés de la relation d'équivalence)

1. La relation d'équivalence est une relation d'équivalence : symétrie, réflexivité, transitivité
2. Si $u_n \sim v_n$, les suites (u_n) et (v_n) sont de même signe à partir d'un certain rang.
3. Si $u_n \sim v_n$ et $u'_n \sim v'_n$ alors $u_n u'_n \sim v_n v'_n$ et $\dfrac{u_n}{u'_n} \sim \dfrac{v_n}{v'_n}$
4. Si $u_n \sim v_n$ et α est un réel **fixé** alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$
5. Si $v_n = o(u_n)$ alors $u_n + v_n \sim u_n$

Démonstration : Toutes ces propriétés découlent directement des règles de calculs sur les limites.

□

ATTENTION

— On ne peut pas élever un équivalent à une puissance qui dépend de n. Par exemple $1 + \frac{1}{n} \sim 1$ mais $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \nsim 1^n$ puisque $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

— On ne peut pas composer (à gauche) des équivalents. Par exemple $n^2 \sim n^2 + n$ mais $f(n^2 + n)$ n'est pas nécessairement équivalent à $f(n^2)$ par exemple si $f : x \mapsto e^x$.

2. Croissances comparées

Proposition (Croissances comparées)

1. En $+\infty$: Soit α, β et γ trois réels strictement positifs, $(\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha)$ et $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\gamma x})$.
2. En 0 : Soit α, β deux réels strictement positifs, $|\ln x|^\beta \underset{x\to 0}{=} o(x^{-\alpha})$.

Remarques :

1. Les croissances comparées permettent de comparer des termes qui tendent vers $+\infty$. En passant à l'inverse on peut comparer des termes qui tendent vers 0.
2. Si on note $f \underset{x\to+\infty}{<<} g$ le fait que f soit négligeable devant g en $+\infty$, la première des deux croissances comparées devient
$$(\ln x)^\beta \underset{x\to+\infty}{<<} x^\alpha \underset{x\to+\infty}{<<} e^{\gamma x}$$
3. On peut résumer ces croissances comparées en disant que les logarithmes « perdent » devant les fonctions puissances et que les fonctions puissances « perdent » devant les exponentielles. Ici le terme « perdre » signifie que deux fonctions amènent une somme ou un produit à un comportement antagoniste, on néglige le comportement de la fonction qui « perd ».

Exemples :

1. Si on étudie $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$. La fonction puissance $x \mapsto x$ veut faire tendre vers 0 et la fonction $x \mapsto \ln(x)$ veut faire tendre vers l'infini (en l'occurence $-\infty$). C'est la fonction puissance qui « gagne » c'est-à-dire que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$.
Cela s'écrit avec le signe o en disant que $\ln(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^{-1}\right)$.
2. On étudie $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{-\sqrt{x}}$. La fonction puissance $x \mapsto x^3$ veut faire tendre vers $+\infty$ et la fonction $x \mapsto e^{-\sqrt{x}}$ veut faire tendre vers 0. C'est la fonction exponentielle qui « gagne » c'est-à-dire que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 e^{-\sqrt{x}} = 0$.
Pour le justifier précisément on commence par poser $X = \sqrt{x}$ pour se ramener à $\lim\limits_{X\to+\infty} X^6 e^{-X}$. On utilise alors que $X^6 \underset{X\to+\infty}{=} o(e^X)$. Cela montre que
$$X^6 e^{-X} = \frac{X^6}{e^X} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la limite de $x^n e^{-x^2}$ en $+\infty$ en la justifiant.

3. Équivalents et somme

Il faut faire attention quand on veut faire « des sommes d'équivalents ». Le principe de l'équivalent est de garder le terme prédominant d'un développement asymptotique de la suite. Dans le cas d'une somme (ou d'une différence) ces termes prédominants peuvent se compenser, il faut alors regarder les termes suivants.

Regardons comment calculer des équivalents des termes suivants : $\ln(1+\frac{1}{n})+\frac{1}{n^2}$, $\ln(1+\frac{1}{n})+\frac{1}{n}$, $\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}$ et $\ln(1+\frac{1}{n})+\frac{1}{n-1}$.

4. Développements limités

Définition

Soit I un intervalle et a un point intérieur à I. Soit $n \in \mathbf{N}$ et f une fonction définie sur I. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n en a s'il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que :
$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1.(x-a) + \cdots + a_n.(x-a)^n + \underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$
Pour $a = 0$, f admet un développement limité à l'ordre n en 0 s'il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que :
$\forall x \in I, \quad f(x) = a_0 + a_1.x + \cdots + a_n.x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$

Proposition (Développements limités usuels en 0)

- La fonction $x \mapsto e^x$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Elle admet des développement à tout ordre en 0 et, pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
- Les fonctions $x \mapsto \operatorname{ch} x$ et $x \mapsto \operatorname{sh} x$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Elles admettent des développements à tout ordre en 0 et, pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$
- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Elles admettent des développements à tout ordre en 0 et, pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n+1}) \quad \text{et} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$
- La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$. Elle admet des développements à tout ordre en 0 et, pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$\forall x > -1, \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
- Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$. Elle admet des développements à tout ordre en 0 et, pour tout $n \in \mathbf{N}$:
$$\forall x > -1, \quad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + o(x^n)$$
En particulier, $\forall x > -1$,
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \quad \text{et} \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

Remarque : Les développements limités de arctan, arccos et arcsin en 0 s'obtiennent par intégration du développement de leur dérivée.

4. Exercices équivalents

Déterminer des équivalents simples des termes suivants quand n tend vers $+\infty$

1. $\dfrac{3n+\ln(n)}{3^n+2^n}$
2. $n\sin\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)$
3. $\sqrt{n^2-n+1}-n$
4. $\ln\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\right)$
5. $\cos(1/n)-\dfrac{n+1}{n}$
6. $\exp(n+n^2)$
7. $\dfrac{n!+n\cos(n)}{n+n\ln n}$
8. $\tan\left(\dfrac{n^2\pi+1}{n}\right)$
9. $\ln(\cos(1/n^2))$
10. $\sqrt[3]{n^4+3n-1}$
11. $\dfrac{1}{1-\sin(1/n)}-1$
12. $\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^n$

5. Exercices développements limités

Déterminer le développement limité de la fonction donnée en a et à l'ordre n

1. $\sin x + x\cos x$; $a=0$; $n=3$
2. $e^x\ln(1+x)$; $a=0$; $n=3$
3. $\sqrt{1+x^2}+\cos^2 x$; $a=0$; $n=4$
4. $\ln(1+\sin x)$; $a=0$; $n=3$
5. $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$; $a=0$; $n=3$
6. $\sqrt{1+e^x}$; $a=0$; $n=3$
7. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}$; $a=0$; $n=3$
8. $\cos(x)$; $a=\pi/3$; $n=3$
9. $\ln(\ln(x))$; $a=e$; $n=3$
10. $\arctan x+\dfrac{1}{1+x^2}$; $a=0$; $n=3$
11. $(\cos x)^{\sin x}$; $a=0$; $n=3$
12. $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t}$; $a=0$; $n=5$