Exercice 1

Le but de l'exercice est de démontrer la formule de Stirling qui donne un équivalent de $n!$ quand n tend vers $+\infty$:

$$n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} = n^{n+1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi}$$

1) a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $n\ln n = \sum\limits_{k=2}^{n} k\ln(k) - (k-1)\ln(k-1)$.

   b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\ln(n!) - n\ln n = \sum\limits_{k=2}^{n}(k-1)\ln\left(1-\dfrac{1}{k}\right)$.

2) Faire un développement asymptotique de $(k-1)\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$ pour k tendant vers $+\infty$ à l'ordre 2.

3) En déduire qu'il existe une suite (α_k) telle que

$$\alpha_k \sim \frac{1}{6k^2} \text{ et } \forall n \geqslant 2, \ln(n!) = n\ln n - n + 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2k} + \sum_{k=2}^{n}\alpha_k.$$

4) a) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\left(\ln(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) + n\right) \longrightarrow C.$$

   On pourra utiliser qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que : $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

   b) En déduire qu'il existe une constante K telle que

$$n! \sim K n^n e^{-n}\sqrt{n}.$$

On veut maintenant déterminer la valeur de K. Pour cela on définit pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \; dt.$$

5) a) Calculer I_0 et I_1.

   b) A l'aide d'une intégration par parties montrer que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}I_n$.

   c) En déduire des formules pour I_{2p} et I_{2p+1}. Les formules voulues font intervenir des factorielles et des puissances de 2.

6) a) Déterminer le sens de variation de (I_n).

   b) Montrer que $I_{n+2} \sim I_n$ et en déduire que $I_n \sim I_{n+1}$.

   c) Montrer que $(n+1)I_nI_{n+1}$ est une suite constante et en déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

7) Montrer que la constante K de la question 4.b) vaut $\sqrt{2\pi}$.

Exercice 2 (135 p 11)

Soit α un réel strictement positif ; on définit la suite (u_n) par $u_1 > 0$ et $\forall n \geqslant 1$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n^\alpha u_n}$.

1) Montrer que si (u_n) converge alors $\alpha > 1$.

2) Réciproquement, monter que si $\alpha > 1$ alors (u_n) converge.

3) On suppose $\alpha > 1$, et on pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n >$ Déterminer un équivalent simple de $u_n - \ell$.

4) On suppose $\alpha \in]0,1]$. Déterminer un équivalent simple de u_n.