Partie I

1) Toute valeur de $[\![1,n]\!]$ convient pour p car f^p est bijectif comme composé d'endomorphismes bijectifs, donc $\mathrm{Ker}(f^p)=\{0\}$ et $\mathrm{Im}(f^p)=E$ sont supplémentaires.

2) a) Comme les lignes L_1 et L_3 de la matrice sont opposées mais les deux premières lignes sont non colinéaires, f est de rang 2.

Comme de plus les deux premières colonnes de la matrice sont non colinéaires, $\mathrm{Im}(f)$ admet pour base $(4e_1-2e_2-4e_3,-e_1-e_2+e_3)$ ou encore $(-2e_1+e_2+2e_3,e_1+e_2-e_3)$.

Soit $x\in E$ et $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(x)$.

On a

$$x\in\mathrm{Ker}(f)\Leftrightarrow\begin{cases}4x_1-x_2+5x_3&=&0\\-2x_1-x_2-x_3&=&0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x_2+3x_3&=&0\quad L_1\leftarrow L_1-2L_2\\-2x_1-x_2-x_3&=&0\end{cases}$$

On en déduit que

$$\mathrm{Ker}(f)=\{(-x_3,x_3,x_3)\ ,\ x_3\in\mathbb{R}\}$$

Finalement $\mathrm{Ker}(f)$ admet pour base $(-e_1+e_2+e_3)$.

Calculons le déterminant dans la base (e_1,e_2,e_3) de la concaténée des bases précédentes :

$$\begin{vmatrix}-2&1&-1\\1&1&1\\2&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&1&0\\1&1&2\\2&-1&0\end{vmatrix}=-2\begin{vmatrix}-2&1\\2&-1\end{vmatrix}=0$$

(avec $C_3\leftarrow C_3+C_2$)

Ainsi cette concaténée n'est pas libre, donc $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ ne sont pas en somme directe, et ainsi on ne peut pas prendre $p=1$.

b) Pour commencer

$$\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(f^2)=\begin{pmatrix}-2&2&-4\\-2&2&-4\\2&-2&4\end{pmatrix}$$

Cela montre que $\mathrm{Im}(f^2)$ a pour base $(e_1+e_2-e_3)$. Comme de plus, $\mathrm{Ker}(f^2)$ a pour équation $x_1-x_2+2x_3=0$. C'est un hyperplan qui ne contient pas la droite $\mathrm{Im}(f^2)$ car $1-1+2.(-1)\neq0$, donc $\mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2)$ sont supplémentaires.

3) a) Pour tout $x\in\mathrm{Ker}(f^k)$, $f^{k+1}(x)=f(f^k(x))=f(0)=0$ donc $x\in\mathrm{Ker}(f^{k+1})$

De plus, $\mathrm{Im}(f^{k+1})=f^k(f(E))\subset f^k(E)=\mathrm{Im}(f^k)$

b) D'après le i) de la question précédente, la suite (a_k) est croissante. Si elle était strictement croissante, comme elle est composée d'entiers naturels, elle tendrait vers $+\infty$. Ceci est contradictoire car la suite (a_k) est majorée par la dimension n de E.

Il existe donc $k\in\mathbb{N}$ tel que $a_k=a_{k+1}$.

c) On peut considérer le plus petit entier tel que $a_k=a_{k+1}$ (toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément). Notons le p.

On voit que $p\geqslant1$ car pour $k=0$, $a_0=0=\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{id}))$ et $a_1=\dim(\mathrm{Ker}(f))>0$ puisque f n'est pas injectif car sinon il serait bijectif (f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie).

Comme

$$\mathrm{Ker}(f^0)\subset\mathrm{Ker}(f^1)\subset\ldots\subset\mathrm{Ker}(f^p)\subset\mathrm{Ker}(f^{p+1}),$$

on a, en utilisant les dimensions :

$$\mathrm{Ker}(f^0)\subsetneq\mathrm{Ker}(f^1)\subsetneq\ldots\subsetneq\mathrm{Ker}(f^p)=\mathrm{Ker}(f^{p+1})$$

Soit $k\geqslant p$, montrons que $\mathrm{Ker}(f^k)=\mathrm{Ker}(f^{k+1})$. Une des inclusions est immédiate. Pour $x\in\mathrm{Ker}(f^{k+1})$ on a $f^{p+1}(f^{k-p}(x))=0$. Cela implique que $f^{k-p}(x)\in\mathrm{Ker}(f^{p+1})=\mathrm{Ker}(f^p)$ et donc $x\in\mathrm{Ker}(f^k(x))$.

On en déduit par récurrence que $\forall k\geqslant p,\ \mathrm{Ker}(f^k)=\mathrm{Ker}(f^p)$.

d) Comme E est de dimension finie, sa dimension est la somme des dimensions de $\mathrm{Ker}(f^p)$ et de $\mathrm{Im}(f^p)$ par le théorème du rang.

Il suffit donc de prouver que $\mathrm{Ker}(f^p)$ et $\mathrm{Im}(f^p)$ sont en somme directe pour en déduire qu'ils sont supplémentaires.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p)$. Par définition, x a un antécédent α par f^p, et on a

$$0 = f^p(x) = f^{2p}(\alpha)$$

donc $\alpha \in \mathrm{Ker}(f^{2p}) = \mathrm{Ker}(f^p)$, car $2p \geqslant p$.

Ainsi $0 = f^p(\alpha) = x$, ce qu'il fallait démontrer.

Partie II

4) a) On reprend les notations de la question 3 (qui s'applique car f n'est pas bijectif car sinon $p = 1$ conviendrait, mais on a supposé $p = n > 1$).

On a $a_0 = 0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n$. On en déduit que $a_n \geqslant n$ et donc que $a_n = n$. Cela montre que $\mathrm{Ker}(f^n) = E$ et donc que f^n est l'endomorphisme nul.

En reprenant le calcul précédent, $a_1 = 1$ (car sinon $a_n > n$).

b) Procédons par analyse-synthèse :

— Analyse : Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une base de $\mathbb{R}^3$ telle que $f(\varepsilon_1) = 0, f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1$ et $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_2$.
Commençons par chercher ε_3. On voit que $f^3(\varepsilon_3) = f^2(\varepsilon_2) = f(\varepsilon_1) = 0$. Par contre $f^2(\varepsilon_3) = \varepsilon_1 \neq 0$ puisque que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Cela signifie que $\varepsilon_3 \in \mathrm{Ker}(f^3) \setminus \mathrm{Ker}(f^2)$. En calculant on obtient que

$$N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = 0$$

On peut donc prendre (par exemple) $\varepsilon_3 = (1, 0, 0) \in \mathrm{Ker}(f^3) \setminus \mathrm{Ker}(f^2)$.
On pose alors $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_3) = (1, -1, 0)$ et $\varepsilon_1 = f(\varepsilon_2) = (1, 1, 1)$.

— Synthèse : On pose $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ et ε_3 comme trouvé ci-dessus. On vérifie alors que

$$\det(\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Cela montre que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme f^3 annule chacun des vecteurs de la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ c'est l'endomorphisme nul, mais f^2 n'annule pas ε_3 donc n'est pas l'endomorphisme nul.

Ainsi $\mathrm{Ker}(f^2) \subsetneq \mathrm{Ker}(f^3) = \{0\} = \mathrm{Ker}(f^4)$. Donc $p = 3$.

5) a) Soit $k \in [\![0, p[\![$. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(f^k)$ étant un sous-espace vectoriel strict de $\mathrm{Ker}(f^{k+1})$ (qui est de dimension finie), il admet dans cet espace un supplémentaire non réduit au vecteur nul.

b) On choisit une base $(e_1, \ldots, e_{a_1})$ de $\mathrm{Ker}(f)$.

On se donne ensuite un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans $\mathrm{Ker}(f^2)$ et on choisit une base $(e_{a_1+1}, \ldots, e_{a_2})$ de ce supplémentaire. On obtient ainsi une base $(e_1, \ldots, e_{a_2})$ de $\mathrm{Ker}(f^2)$.

On continue ainsi jusqu'à obtenir une base $(e_1, \ldots, e_{a_p})$ de $\mathrm{Ker}(f^p) = E$ (avec $a_p = n$).

Comme a_1 n'est pas nul (sinon f serait injectif donc bijectif et p vaudrait 1), $e_1 \in \mathrm{Ker}(f)$ car $1 \leqslant a_1$.

Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, notant i l'unique entier tel que $a_i < k \leqslant a_{i+1}$, on a $0 = f^{i+1}(e_k) = f^i(f(e_k))$ donc $f(e_k) \in \mathrm{Ker}(f^i) = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{a_i}) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{k-1})$ car $a_i < k$ donc $a_i \leqslant k - 1$.

Remarquons que la matrice de f dans cette base est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.

Partie III

6) L'application φ_k est bien à valeurs dans $\mathrm{Ker}(f^k)$ car pour tout $x \in G_{k+1}$, comme $G_k \subset \mathrm{Ker}(f^{k+1})$,

$$0 = f^k(f(x)) = f^k(\varphi_k(x))$$

donc $\varphi_k(x) \in \mathrm{Ker}(f^k)$.

La linéarité de φ_k résulte de celle de f.

7) Par définition, $\mathrm{Ker}(\varphi_k) = G_{k+1} \cap \mathrm{Ker}(f)$.
Soit $k \geqslant 1$. On sait que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^k)$ donc $\mathrm{Ker}(\varphi_k) \subset G_{k+1} \cap \mathrm{Ker}(f^k) = \{0\}$.
Ainsi φ_k est injective donc induit un isomorphisme de G_{k+1} vers $\varphi_k(G_{k+1}) = f(G_{k+1})$, qui ont ainsi même dimension.

8) Soit $x \in f(G_{k+1}) \cap \mathrm{Ker}(f^{k-1})$.
Le vecteur x a donc au moins un antécédent α par f dans G_{k+1}.
Comme $0 = f^{k-1}(x) = f^k(\alpha)$, $\alpha \in G_{k+1} \cap \mathrm{Ker}(f^k) = \{0\}$ et donc $x = 0$.
On a donc montré que $f(G_{k+1}) \cap \mathrm{Ker}(f^{k-1}) \subset \{0\}$. L'inclusion réciproque est évidente.

9) Par la question précédente,

$$\dim(f(G_{k+1})) + \dim(\mathrm{Ker}(f^{k-1})) = \dim(f(G_{k+1}) + \mathrm{Ker}(f^{k-1})) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(f^k)) = a_k$$

car $f(G_{k+1})$ et $\mathrm{Ker}(f^{k-1})$ sont deux sous-espaces de $\mathrm{Ker}(f^k)$.
De plus $\dim(f(G_{k+1})) = \dim G_{k+1}$ par la question 7), donc $\dim(f(G_{k+1})) = a_{k+1} - a_k$.
On a donc

$$(a_{k+1} - a_k) + a_{k-1} \leqslant a_k$$

Donc

$$a_{k+1} - a_k \leqslant a_k - a_{k-1}$$

10) On a ici par hypothèse $a_{n-1} = n$ et $a_{n-1} - a_{n-2} \geqslant 1$. Par ce qui précède, $a_1 - 0 = a_1 - a - 0 \geqslant a_2 - a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_{n-1} - a_{n-2} \geqslant 1$.
Ainsi d'une part, $a_1 \geqslant 1$ (f n'est pas injectif).
D'autre part, $a_1 = (a_1 - a_2) + \ldots + (a_{n-2} - a_{n-1}) + a_{n-1} \leqslant (n-2).(-1) + n = 2$.
Si (absurde) $a_1 = 1$, alors $1 = a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = \ldots = a_{n-1} - a_{n-2}$, donc $n - 1 = a_{n-1} - a_0 = n$, ce qui est contradictoire.
Donc $a_1 = 2$.