– Partie I –

1) Convergence de la suite $\left(\frac{J_p}{I_p}\right)$

a) On considère la fonction

$$f : t \mapsto \frac{\pi}{2}\sin(t) - t.$$

Elle est $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On a pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$f'(t) = \frac{\pi}{2}\cos(t) - 1 \text{ et } f''(t) = -\frac{\pi}{2}\sin(t).$$

On peut alors établir le tableau de variations de f.

t	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$f''(t)$		$-$		$-$	
$f'(t)$	$\frac{\pi}{2}-1$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

L'existence de α résulte du théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue f' qui vérifie $f'(0) = \frac{\pi}{2} - 1 > 0 > -1 = f'(1)$.

On en déduit que pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(t) \geqslant 0$ et donc $\dfrac{\pi}{2}\sin(t) \leqslant t$.

Remarque : Cette question peut aussi se traiter en justifiant que $t \mapsto \sin t$ est concave. Sa courbe se situe donc au dessus de sa corde entre le point de coordonnées $(0, 0)$ et celui de coordonnées $(\frac{\pi}{2}, 1)$.

b) On en déduit : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leqslant t^2 \leqslant \left(\dfrac{\pi}{2}\sin(t)\right)^2 \implies 0 \leqslant t^2\cos^{2p}(t) \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\sin^2(t)\cos^{2p}(t)$ car $\cos^{2p}(t) \geqslant 0$.

D'où : $0 \leqslant J_p \leqslant \dfrac{\pi^2}{4}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^{2p}(t)dt = \dfrac{\pi^2}{4}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))\cos^{2p}(t)dt = \dfrac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1})$ par linéarité de l'intégrale.

c) On reconnait une intégrale de Wallis. On a par intégration par parties (les applications sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$) :

$$\begin{aligned} I_{p+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos^{2p+1} t dt = [(\sin t)\cos^{2p+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2p+1)\sin t(-\sin t)\cos^{2p} t dt \\ &= 0 + (2p+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 t)\cos^{2p} t\, dt = (2p+1)(I_p - I_{p+1}) \end{aligned}$$

d'où $(2p+2)I_{p+1} = (2p+1)I_p \iff \boxed{I_{p+1} = \dfrac{2p+1}{2p+2}I_p}$ pour $p \geqslant 0$.

d) • $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt = \dfrac{\pi}{2} > 0$; une récurrence simple en utilisant la relation précédente permet de conclure : $I_p > 0$ pour tout $p \geqslant 0$.

• On a donc par b) en multipliant par $\dfrac{1}{I_p} > 0$:

$$0 \leqslant \frac{J_p}{I_p} \leqslant \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{I_{p+1}}{I_p}\right) = \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{2p+1}{2p+2}\right) \longrightarrow 0 \text{ quand } p \text{ tend vers } +\infty.$$

Ainsi $\frac{J_p}{I_p}$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$ par le théorème d'encadrement.

2) Convergence et limite de la suite (S_n).

a) Les applications $t \longmapsto t$, $t \longmapsto t^2$ et $t \longmapsto \cos^{2p}(t)$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et donc par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
I_p &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ .\ \cos^{2p} t\ dt = [t\cos^{2p} t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t\ (2p)(-\sin t)\cos^{2p-1} t\ dt \\
&= 0 + (2p)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2p-1}(t)\ dt \\
&= 2p\left(\left[\frac{t^2}{2}\sin(t)\cos^{2p-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\ \left(\cos(t)\cos^{2p-1}(t) - (2p-1)\sin^2(t)\cos^{2p-2}(t)\right)\ dt\right) \\
&= 0 - p\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\ \cos^{2p}(t)\ dt - (2p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\ (1-\cos^2(t))\cos^{2p-2}(t))\ dt\right) \\
&= -p\left(2p\ J_p - (2p-1)\ J_{p-1}\right)
\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{I_p = p\left(-2p\ J_p + (2p-1)\ J_{p-1}\right)}$ $(p \geqslant 1)$

b) En divisant par $I_{p-1} > 0$, on a, en utilisant plusieurs fois la relation obtenue en 1) c) :

$$\begin{aligned}
\frac{I_p}{I_{p-1}} = \frac{2p-1}{2p} &= p\left(-2p\ \frac{J_p}{I_{p-1}} + (2p-1)\ \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}}\right) = p\left((-2p)\ \frac{J_p}{I_p}\ \frac{2p-1}{2p} + (2p-1)\ \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}}\right) \\
&= p(2p-1)\left(-\frac{J_p}{I_p}\ + \frac{J_{p-1}}{I_{p-1}}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit pour $p \geqslant 1$: $\boxed{\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}}$.

c) • On a vu que $\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}}$; $J_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\ dt = \boxed{\frac{\pi^3}{24}}$.

• Or on a $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = 2\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p}\right) = 2\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \sum_{p=1}^{n}\frac{J_p}{I_p}\right) = 2\left(\sum_{p=0}^{n-1}\frac{J_p}{I_p} - \sum_{p=1}^{n}\frac{J_p}{I_p}\right)$

ainsi : $S_n = 2\left(\frac{J_0}{I_0} - \frac{J_n}{I_n}\right) \longrightarrow 0$ quand n tend vers $+\infty$ par 1) d).

D'ou $S = 2\ \frac{J_0}{I_0} = 2\ \frac{\pi^3}{24}\ \frac{2}{\pi} = \boxed{\frac{\pi^2}{6}}$.

– Partie II –

3) Sommation de séries télescopiques

a) Soit f dans E :

• Par opérations sur les fonctions continues : composition ($x \longmapsto x+1$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ à valeurs dans $]1, +\infty[$, intervalle sur lequel f est continue, donc $x \longmapsto f(x+1)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$) et combinaison linéaire, Δf est bien continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ si f l'est.

• Par composition des limites : $x \longmapsto x+1$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, donc $x \longmapsto f(x+1)$ tend vers 0 en $+\infty$.

Ainsi $x \longmapsto f(x+1) - f(x) = (\Delta f)(x)$ tend vers 0 en $+\infty$.

• $\forall f, g \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \Delta(\lambda f + \mu g)(x) &= (\lambda f + \mu g)(x+1) - (\lambda f + \mu g)(x) \\
&= \lambda(f(x+1) - f(x)) + \mu(g(x+1) - g(x)) \\
&= \lambda(\Delta f)(x) + \mu(\Delta g)(x) = \Big(\lambda(\Delta f) + \mu(\Delta g)\Big)(x)
\end{aligned}$$

D'où $\Delta(\lambda f+\mu g)=\lambda(\Delta f)+\mu(\Delta g)$:
Δ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E.

b) Si $n\geqslant 1$, on a $T_n=\sum_{p=1}^{n}(\Delta f)(p)=\sum_{p=1}^{n}f(p+1)-f(p)=\sum_{p=1}^{n}f(p+1)-\sum_{p=1}^{n}f(p)$

$=\sum_{p=2}^{n+1}f(p)-\sum_{p=1}^{n}f(p)=f(n+1)-f(1)$. Or f étant de limite nulle en $+\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty}T_n=-f(1)$.

Ainsi la série $\sum\Big((\Delta f)(p)\Big)_{p\geqslant 1}$ est convergente et $\boxed{\sum_{p=1}^{+\infty}(\Delta f)(p)=-f(1)}$.

• De même, si $n\leqslant N$: $\sum_{p=n+1}^{N}(\Delta f)(p)=\sum_{p=n+1}^{N}f(p+1)-f(p)=\sum_{p=n+1}^{N}f(p+1)-\sum_{p=n+1}^{N}f(p)$

$=\sum_{p=n+2}^{N+1}f(p)-\sum_{p=n+1}^{N}f(p)=-f(n+1)+f(N+1)$

Or f étant de limite nulle en $+\infty$, en faisant tendre N vers $+\infty$ à $\boxed{n \text{ fixé}}$, on a :

$\boxed{\sum_{p=n+1}^{+\infty}(\Delta f)(p)=-f(n+1)}$.

c) $\forall x>0,\ \Delta f_{k-1}(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x+1+1)(x+1+2)...(x+1+(k-1))}-\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)...(x+k-1)}$

$=\dfrac{1}{(x+1)(x+2)...(x+k-1)}\left(\dfrac{1}{x+k}-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{-k}{x(x+1)(x+2)...(x+k)}$

Donc $\boxed{\Delta f_{k-1}=-k\ f_k \text{ si } k\geqslant 1}$.

d) i) $f_k(p)\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{p^{k+1}}$ or $\sum\left(\dfrac{1}{p^{k+1}}\right)_{p\geqslant 1}$ est une série de Riemann convergente

car $k+1\geqslant 1+1=2>1$; les séries étant à termes positifs, $\sum(f_k(p))_{p\geqslant 1}$ est convergente.

D'après 3)b) et 3) c) on a :

$\sum_{p=n+1}^{+\infty}f_k(p)=-\dfrac{1}{k}\sum_{p=n+1}^{+\infty}(\Delta f_{k-1})(p)=-\dfrac{1}{k}\left(-f_{k-1}(n+1)\right)=\dfrac{1}{k}\dfrac{1}{(n+1)(n+2)...(n+k)}$.

4) a) Comme $t\longmapsto\dfrac{1}{t^2}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$, si k un entier supérieur à 1 :

$k\leqslant t\leqslant k+1\Longrightarrow\dfrac{1}{(k+1)^2}\leqslant\dfrac{1}{t^2}\leqslant\dfrac{1}{(k+1)^2}$, d'où : $\dfrac{1}{(k+1)^2}\leqslant\int_k^{k+1}\dfrac{1}{t^2}\,dt\leqslant\dfrac{1}{(k+1)^2}$.

En sommant de $k=n$ à $k=N-1$ on a : $\sum_{k=n}^{N-1}\dfrac{1}{(k+1)^2}\leqslant\int_n^N\dfrac{1}{t^2}\,dt\leqslant\sum_{k=n}^{N-1}\dfrac{1}{k^2}$ ainsi :

$\boxed{\sum_{k=n+1}^{N}\dfrac{1}{k^2}\leqslant\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{N}\leqslant\sum_{k=n}^{N-1}\dfrac{1}{k^2}}$.

On fait alors tendre N vers $+\infty$ à $\boxed{n \text{ fixé}}$: $R_n\leqslant\dfrac{1}{n}\leqslant R_n+\dfrac{1}{n^2}$ et donc : $\boxed{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\leqslant R_n\leqslant\dfrac{1}{n}}$.

b) Ainsi, pour que R_{N_0} soit inférieur à 10^{-2}, $\boxed{\text{il suffit que}}\ \dfrac{1}{N_0}\leqslant 10^{-2}$, et donc $\boxed{N_0=100}$ convient.

c) En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'encadrement $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\leqslant R_n\leqslant\dfrac{1}{n}$ déterminé à la question 4)a)
on obtient que $R_n\sim\dfrac{1}{n}$.

5) a)

$$a_1(p)=\frac{1}{p^2}-f_1(p)$$

Remarquons que $\frac{1}{p^2} = \frac{p+1}{p} f_1(p)$.
Ainsi $a_1(p) = (\frac{p+1}{p} - 1) f_1(p) = \frac{1}{p} f_1(p)$.

b) On a par linéarité de la sommation des séries convergentes :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p} f_1(p) &= \sum_{p=n+1}^{\infty} a_1(p) \\
&= \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{p=n+1}^{\infty} f_1(p) \\
&= \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n+1} \quad \text{en utilisant la question 3)d)ii)} \\
&= R_n - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

c) Les $f_1(p)$ sont positifs et pour tout $p \geqslant n+1$ on a $0 \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{n+1}$.
Donc

$$0 \leqslant \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p} f_1(p) \leqslant \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{n+1} f_1(p) \leqslant \frac{1}{n+1} \frac{1}{n+1}$$

(en utilisant à nouveau 3)d)ii)
D'où l'encadrement demandé.

d) Comme $S - (S_n + \frac{1}{n+1}) = R_n - \frac{1}{n+1} \geqslant 0$, il suffit de prendre $N_1 = 9$ pour avoir

$$0 \leqslant S - (S_{N_1} + \frac{1}{N_1 + 1}) \leqslant 10^{-2}.$$

On obtient ainsi une approximation de $\frac{\pi^2}{6}$ à 10^{-2} près avec beaucoup moins de calculs (on rappelle que $N_0 = 100$).

6) a) Soit $p \geqslant 1$. On procède à une récurrence sur l'entier q.
La propriété à démontrer est vraie au rang $q = 1$ d'après la question 5)a).
Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_q(p) = \frac{q!}{p} f_q(p)$.
Alors $a_{q+1}(p) = a_q(p) - q! f_{q+1}(p) = q!(\frac{1}{p} f_q(p) - f_{q+1}(p))$.
Remarquant que $f_q(p) = (p+q+1) f_{q+1}(p)$, il vient :

$$a_{q+1}(p) = q! \left(\frac{p+q+1}{p} - 1 \right) f_{q+1}(p) = (q+1)! f_{q+1}(p)$$

Par récurrence, la propriété est démontrée.

b) Soient $n, q \geqslant 1$.
On a par linéarité de la sommation des séries convergentes :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=n+1}^{\infty} a_q(p) &= \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} (k-1)! \sum_{p=n+1}^{\infty} f_k(p) \\
&= \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q} (k-1)! \frac{1}{k} \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \quad \text{en utilisant la question 3)d)ii)}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{\infty} a_q(p) = q! \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{p} f_q(p)$

Or les $f_q(p)$ sont positifs et pour tout $p \geqslant n+1$ on a $0 \leqslant \frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{n+1}$.
Donc

$$0 \leqslant \sum_{p=n+1}^{\infty} a_q(p) \leqslant q! \sum_{p=n+1}^{\infty} \frac{1}{n+1} f_q(p) \leqslant q! \frac{1}{n+1} \frac{1}{q} \frac{1}{(n+1)(n+2)\dots(n+q)}$$

(en utilisant à nouveau 3)d)ii)
D'où, après simplification, l'encadrement demandé.

c) Comme $\displaystyle\sum_{p=n+1}^{\infty}\frac{1}{p^2}=S-S_n=\frac{\pi^2}{6}-S_n$, l'encadrement précédent s'écrit

$$0\leqslant\frac{\pi^2}{6}-S'_n\leqslant\frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\dots(n+q)}$$

avec

$$S'_n=S_n+\sum_{k=1}^{q}\frac{(k-1)!}{k(n+1)\dots(n+k)}.$$

d) Pour $q=2$, on a

$$S'_n=S_n+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$$

et l'encadrement s'écrit

$$0\leqslant\frac{\pi^2}{6}-S'_n\leqslant\frac{1}{(n+1)^2(n+2)}$$

– Partie III –

7) La relation s'écrit $\displaystyle u_{n-1}=-\sum_{p=2}^{n}\frac{u_{n-p}}{p!}$. Avec la relation $u_0=1$ on en déduit qu'il existe bien une unique suite de nombres réels vérifiant cette relation.
De plus, par récurrence FORTE, les u_n sont tous rationnels.

$$\begin{aligned}
u_1 &= -\sum_{p=2}^{2}\frac{u_{2-p}}{p!}=-\frac{u_0}{2}=-\frac{1}{2}\\
u_2 &= -\sum_{p=2}^{3}\frac{u_{3-p}}{p!}=-\frac{u_1}{2}-\frac{u_0}{6}=\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}\\
u_3 &= -\sum_{p=2}^{4}\frac{u_{4-p}}{p!}=-\frac{u_2}{2}-\frac{u_1}{6}-\frac{u_0}{24}=-\frac{1}{24}+\frac{1}{12}-\frac{1}{24}=0
\end{aligned}$$

8) a) i)

$$\begin{aligned}
U_1 &= u_1+u_0X=-\frac{1}{2}+X\\
U_2 &= u_2+u_1X+\frac{u_0X^2}{2}=\frac{1}{12}-\frac{X}{2}+\frac{X^2}{2}\\
U_3 &= u_3+u_2X+\frac{u_1X^2}{2}+\frac{u_0X^3}{6}=\frac{X}{12}-\frac{X^2}{4}+\frac{X^3}{6}
\end{aligned}$$

Remarque : les u_n (respectivement : les U_n) sont appelés **nombres (respt : polynômes) de Bernoulli**.

ii) Pour tout $n\geqslant 1$,

$$U'_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{u_{n-p}X^{p-1}}{(p-1)!}=\sum_{q=0}^{n-1}\frac{u_{n-(q+1)}X^q}{q!}=U_{n-1}$$

par le changement d'indice $q=p-1,\ p=q+1$.
Pour tout $n\geqslant 2$,

$$U_n(1)-U_n(0)=\sum_{p=0}^{n}\frac{u_{n-p}(1-0^p)}{p!}=\sum_{p=1}^{n}\frac{u_{n-p}}{p!}=0$$

donc $U_n(1)=U_n(0)$.

b) i) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par récurrence sur p, on a pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $V_n^{(p)} = V_{n-p}$.
Ainsi $V_n^{(n+1)} = V_0' = 0$ donc $deg(V_n) \leqslant n$. Par la formule de Taylor,

$$V_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{V_n^{(p)}(0)X^p}{p!} = \sum_{p=0}^{n} \frac{V_{n-p}(0)X^p}{p!}$$

ii)

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{V_{n-p}(0)}{p!} = V_n(1) - V_n(0) = 0$$

iii) D'après la question précédente et l'unicité de la suite (u_n), on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n(0) = u_n.$$

Puis par définition des U_n et par la question 8)b)i), on a $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{u_{n-p}X^p}{p!} = U_n$.

c) Posons $V_n = (-1)^n U_n(1 - X)$.
On a $V_0 = 1$. De plus pour tout $n \geqslant 1 \quad V_n' = (-1)^n(-1)U_n'(1-X) = (-1)^{n-1}U_{n-1}(1-X) = V_{n-1}$.
Enfin pour tout $n \geqslant 2$, $V_n(0) = (-1)^n U_n(1) = (-1)^n U_n(0) = V_n(1)$.
D'après la question b), $\forall n \in \mathbb{N} \quad V_n = U_n$.
Soit $p \geqslant 1$. On a $u_{2p+1} = U_{2p+1}(0)$.
Or $U_{2p+1}(0) = U_{2p+1}(1)$ par 8)a)ii), et $U_{2p+1}(1) = -U_{2p+1}(0)$ en évaluant l'égalité précédente en 1.
Ainsi $u_{2p+1} = 0$.

9) a) Vérifions l'égalité à démontrer au rang $q = 0$. Le membre de droite s'écrit

$$\begin{aligned}
2\int_0^1 \frac{x - \frac{1}{2}}{(x+p)^3}dx &= 2\int_0^1 \frac{x + p - p - \frac{1}{2}}{(x+p)^3}dx \\
&= 2\int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^2} - (2p+1)\int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^3} \\
&= 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right) - \left(p + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p+1)^2}\right)
\end{aligned}$$

La différence des deux membres est égale à

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \left(p + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p+1)^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(p+1)^2}\right) \\
= & \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \left(p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)\frac{1}{p^2} + \left(p + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{(p+1)^2} \\
= & \ 0
\end{aligned}$$

Passons à l'hérédité. Soit $q \in \mathbb{N}$.
En posant $A_q = (2q+2)!\displaystyle\int_0^1 \frac{U_{2q+1}(x)dx}{(x+p)^{2q+3}}$, on a :

$$\begin{aligned}
A &= (2q+2)!\int_0^1 U_{2q+2}'(x)(x+p)^{-2q-3}dx \\
&= (2q+2)!\left(\left[U_{2q+2}(x)(x+p)^{-2q-3}\right]_0^1 - \int_0^1 U_{2q+2}(x)(-2q-3)(x+p)^{-2q-4}dx\right) \\
&= (2q+2)!u_{2q+2}\left(\frac{1}{(p+1)^{2q+3}} - \frac{1}{p^{2q+3}}\right) + (2q+3)!\int_0^1 U_{2q+2}(x)(x+p)^{-2q-4}dx \\
&= (2q+2)!u_{2q+2}\left(\frac{1}{(p+1)^{2q+3}} - \frac{1}{p^{2q+3}}\right) + (2q+3)!u_{2q+3}\left(\frac{1}{(p+1)^{2q+4}} - \frac{1}{p^{2q+4}}\right) \\
&\qquad + (2q+4)!\int_0^1 U_{2q+3}(x)(x+p)^{-2q-5}dx
\end{aligned}$$

Comme $u_{2q+3} = 0$, on en déduit l'hérédité de la propriété à démontrer.

b) Sommons l'égalité précédente pour p allant de n à N (pour $1 \leqslant n \leqslant N$).
La somme des membres de gauche est égale à :

$$\begin{aligned} & \sum_{p=n}^{N}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{(p+1)}\right)-\frac{1}{2}\left(\sum_{p=n}^{N}\frac{1}{p^2}+\sum_{p=n+1}^{N+1}\frac{1}{p^2}\right)+\sum_{k=1}^{q}(2k)!u_{2k}\sum_{p=n}^{N}\left(\frac{1}{p^{2k+1}}-\frac{1}{(p+1)^{2k+1}}\right) \\ = & \frac{1}{n}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{2n^2}-\sum_{p=n+1}^{N}\frac{1}{p^2}-\frac{1}{2(N+1)^2}+\sum_{k=1}^{q}(2k)!u_{2k}\left(\frac{1}{n^{2k+1}}-\frac{1}{(N+1)^{2k+1}}\right) \end{aligned}$$

(par simplification télescopique)
La somme des membres de droite est majorée en valeur absolue par

$$\begin{aligned} & \sum_{p=n}^{N}(2q+2)!M_{2q+1}\int_0^1 \left|(x+p)^{-2q-3}\right| dx \\ = & \sum_{p=n}^{N}(2q+2)!M_{2q+1}\frac{1}{-2q-2}((p+1)^{-2q-2}-p^{-2q-2}) \\ = & (2q+1)!M_{2q+1}\left(\frac{1}{n^{2q+2}}-\frac{1}{(N+1)^{2q+2}}\right) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \Bigg|\frac{1}{n}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{2n^2}-\sum_{p=n+1}^{N}\frac{1}{p^2}-\frac{1}{2(N+1)^2} \\ & \qquad +\sum_{k=1}^{q}(2k)!u_{2k}\left(\frac{1}{n^{2k+1}}-\frac{1}{(N+1)^{2k+1}}\right)\Bigg| \leqslant (2q+1)!M_{2q+1}\left(\frac{1}{n^{2q+2}}-\frac{1}{(N+1)^{2q+2}}\right) \end{aligned}$$

Passant aux limites quand $N \to \infty$ et remarquant que la limite d'une valeur absolue est la valeur absolue de la limite, on obtient l'inégalité demandée.

c) Le membre de gauche de l'inégalité précédente s'écrit

$$\left|\frac{\pi^2}{6}-S''_n\right|$$

avec

$$S''_n = S_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\sum_{k=1}^{q}\frac{(2k)!u_{2k}}{n^{2k+1}}$$

Pour $q=2$,

$$S''_n = S_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}-\frac{1}{30n^5}$$

On a donc

$$\left|\frac{\pi^2}{6}-\left(S_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{6n^3}-\frac{1}{30n^5}\right)\right| \leqslant \frac{120M_5}{n^6}.$$

Si on veut calculer M_5 : Le calcul donne $U_5 = \frac{X^5}{120}-\frac{X^4}{48}+\frac{X^3}{72}-\frac{X}{720}$

$$U'_5 = U_4 = \frac{X^4}{24}-\frac{X^3}{12}+\frac{X^2}{24}-\frac{1}{720}$$

Comme $U_4(1-X)=U_4$, on sait que $U_4(\frac{1}{2}+X)$ est pair. Le calcul donne $U_4(\frac{1}{2}+X) = \frac{240X^4-120X^2+7}{5760}$, polynôme bicarré.
Les carrés des racines de ce polynôme sont $\frac{120\pm16\sqrt{30}}{480} = \frac{1}{4}\pm\frac{1}{\sqrt{30}}$.
On en déduit les variations puis les bornes de la restriction de U_5 à $[0,1]$.
De pénibles calculs donnent

$$M_5 = \frac{\sqrt{15+4\sqrt{\frac{6}{5}}}}{21600}.$$