Nom :

DS 1

Soir) .... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3

---

1)a) $t \leqslant \pi(\sin t)/2$ .... ☐0 ☐1

1)b) $0 \leqslant J_p \leqslant (\pi^2/4)(I_p - I_{p-1})$ .... ☐0 ☐1

1)c)$I_{p+1} = (2p+1)\int \sin^2 \cos^{2p}$ .... ☐0 ☐1

$I_{p+1} = (2p+1)(I_p - I_{p+1})$ car $\sin^2 = 1 - \cos^2$ .... ☐0 ☐1

I_{p+1} en fction de I_p trouver $(2p+1)I_p = (2p+2)I_{p+1}$ .... ☐0 ☐1

1)d) $I_p > 0$ .... ☐0 ☐1

trouver $0 \leqslant J_p \leqslant \frac{\pi^2}{4}\frac{I_{p+1}}{2p+1} = \frac{\pi^2}{4}\frac{I_p}{2p+2}$ .... ☐0 ☐1

1)d)bis) J_p/I_p tend vers 0. .... ☐0 ☐1

2)a) trouver 1ère ipp : $I_p = \int 2pt \sin \cos^{2p-1}$ .... ☐0 ☐1

trouver $I_p = \int pt^2(-\cos^{2p} + (2p-1)\sin^2\cos^{2p-2})$ .... ☐0 ☐1

trouver $I_p = -2p^2 J_p + p(2p-1)J_{p-1}$ .... ☐0 ☐1

2)b) diviser la relation par I_p ou I_{p-1} .... ☐0 ☐1

Utiliser 1)c) pour trouver $(J_{p-1}/I_{p-1}) - (J_p/I_p) = 1/(2p^2)$ .... ☐0 ☐1

2)c) $J_0 = \pi^3/24$ .... ☐0 ☐1

et $I_0 = \pi/2)$ .... ☐0 ☐1

telescopage des J/I sur une somme partielle .... ☐0 ☐1

rappeler 1)d) $(J/I \to 0)$ .... ☐0 ☐1

limite S de S_n (trouver honnetement $\pi^2/6$) .... ☐0 ☐1

---

3)a) Δ linéaire .... ☐0 ☐1

Δ conserve la continuite .... ☐0 ☐1

Δ conserve la limite nulle .... ☐0 ☐1

3)b) $\sum_p (\Delta f)(p)$ converge .... ☐0 ☐1

$\sum_{p=1}^{\infty}(\Delta f)(p) = -f(1)$ .... ☐0 ☐1

$\sum_{p=n+1}^{\infty}(\Delta f)(p) = f(n+1)$ .... ☐0 ☐1

3)c) $\Delta f_{k-1} = -kf_k$ .... ☐0 ☐1

3)d)i) cv $\sum(f_k(p))_p$ par $f_k(p) \underset{p\to\infty}{\sim} 1/p^{k+1}$ .... ☐0 ☐1

3)d)ii) $\sum_{p=n+1}^{\infty}(f_k(p)) = -\frac{1}{k}\sum_{p=n+1}^{\infty}\Delta f_{k-1} = \frac{1}{k}f_{k-1}(n+1) = \cdots$
$\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}$ .... ☐0 ☐1

4)a) encadrer $R_n = \sum_{n+1}^{\infty} 1/(k^2)$ $1/(n+1) \leqslant R_n \leqslant 1/n)$ .... ☐0 ☐1 ☐2

4)b) donner $N_0 = 100$ tq $R_{N_0} \leqslant 1/100$ .... ☐0 ☐1

4)c) equivalent $R_n \sim 1/n$ .... ☐0 ☐1

5)a) $a_1(p) = \frac{1}{p^2(p+1)} = (1/p)f_1(p)$ .... ☐0 ☐1

5)b) $R_n - (1/n+1) = \sum_{p=n+1}^{\infty}(1/p)f_1(p)$
$= \sum a_1(p) = R_n - \sum f_1(p) = R_n - \frac{1}{1}f_0(n+1)$ .... ☐0 ☐1 ☐2

5)c) $0 \leqslant R_n - (1/n+1) \leqslant (1/(n+1)^2)$ car $\sum_{n+1}^{\infty}\frac{f_1(p)}{p} \leqslant \frac{1}{n+1}\sum f_1(p)$ ☐0 ☐1

5)d) donner $N_1 = 9$ tq $|S - (S_{N_1} + (1/(N_1+1))| \leqslant 1/100$ .... ☐0 ☐1

6)a) $a_q(p) = (q!/p)f_q(p)$ vrai pour $q = 1$ par 5)a) .... ☐0 ☐1

hereditaire : $a_{q+1}(p) = a_q(p) - q!f_{q+1}(p) = q!(\frac{f_q(p)}{p} - f_{q+1}(p)) = \ldots$ ☐0 ☐1

6)b) $0 \leqslant \sum_{p=n+1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} - \sum_{k=1}^{q}\frac{(k-1)!}{k(n+1)\ldots(n+k)} \leqslant \frac{(q-1)!}{(n+1)^2(n+2)\ldots(n+q)}$
car $\sum_p - \sum_k = \sum_p a_q(p)$ .... ☐0 ☐1

et car $\sum_p a_q(p) = \sum_p \frac{q!}{p}f_q(p) \leqslant \frac{q!}{n+1}\sum_p f_q(p) = \frac{q!}{n+1}f_{q-1}(n+1)$ .. ☐0 ☐1

6)c) $S'_n S_n + \sum_{k=1}^{q}\frac{(k-1)!}{k(n+1)\ldots(n+k)}$ tq le membre encadre soit $\frac{\pi^2}{6} - S'_n$ .. ☐0 ☐1

6)d) cas $q = 2$ $S'_n = S_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)(n+2)}$ .... ☐0 ☐1

et $0 \leqslant \frac{\pi^2}{6} - S'_n \leqslant \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}$ .... ☐0 ☐1

---

7) $\exists!(u_n)$ tq $u_0 = 1$ et $\sum_{p=1}^{n}(u_{n-p}/p!) = 0$ pour $n \geqslant 2$. .... ☐0 ☐1

les u_n sont rationnels .... ☐0 ☐1

$u_1 = -1/2$ .... ☐0 ☐1

$u_2 = 1/12$ .... ☐0 ☐1

$u_3 = 0$ .... ☐0 ☐1

8)a)i) $U_1 = -\frac{1}{2} + X$ .... ☐0 ☐1

$U_2 = \frac{1}{12} - \frac{X}{2} + \frac{X^2}{2}$ .... ☐0 ☐1

$U_3 = \frac{X}{12} - \frac{X^2}{4} + \frac{X^3}{6}$ .... ☐0 ☐1

8)a)ii) $\forall n \geqslant 1,\ U_n' = U_{n-1}$ .... ☐0 ☐1

8)a)ii)bis) $\forall n \geqslant 2,\ U_n(0) = U_n(1)$ $U_n(1) = \frac{u_n}{0!} + 0 = U_n(0)$ .... ☐0 ☐1

8)b)i) $V_n^{(p)} = V_{n-p}$ .... ☐0 ☐1

$V_n = \sum_0^n V_{n-p}(0)X^p/p!$ par Taylor .... ☐0 ☐1

8)b)ii) $\sum_1^n V_{n-p}(0)/p! = 0 = V_n(1) - \frac{V_n(0)}{0!}$ .... ☐0 ☐1

8)b)iii) $(V_n) = (U_n)$ .... ☐0 ☐1 ☐2

8)c) $U_n = (-1)^n U_n \circ (1 - X)$ .... ☐0 ☐1 ☐2

8)c)bis) $\forall p \geqslant 1,\ u_{2p+1} = 0$ car $U_{2p+1}(0) = -U_{2p+1}(1) = -U_{2p+1}(0)$ .. ☐0 ☐1

9)a) horrible formule, cas q=0 .... ☐0 ☐1 ☐2

horrible formule, heredite .... ☐0 ☐1 ☐2

9)b) $\left|\sum_{p=n+1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \sum_{k=1}^{q} \frac{(2k)!u_{2k}}{n^{2k+1}}\right| \leqslant \frac{(2q+1)!\ M_{2q+1}}{n^{2q+2}}$ .... ☐0 ☐1

manipulation correcte des inegalites .... ☐0 ☐1

et $\sum_{p=n}^{\infty} \int_0^1 \frac{dx}{(x+p)^{2q+3}} = \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{2p+3}} = \frac{(2q+2)}{n^{2q+2}}$ .... ☐0 ☐1

9)c) $S_n'' = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \sum_{q=1}^{q} \frac{(2k)!u_{2k}}{n^{2k+1}}$ tq |mbre de gche|=$|(\pi^2/6) - S_n''|$ .. ☐0 ☐1

cas q=2, $S_n'' = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30n^5}$ .... ☐0 ☐1

.... ☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6

.... ☐0 ☐1

.... ☐0 ☐1

.... ☐0 ☐1

.... ☐0 ☐1

.... ☐0 ☐1

.... ☐0 ☐1