Dans ce chapitre, $\mathbf{K}$ désigne $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. En pratique tout restera vrai si $\mathbf{K}$ est un corps en général.

Exercice : Pouvez-vous citer quelques corps ?

1 Espaces vectoriels

1.1 Définitions

Définition (Espace vectoriel)

On appelle espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ ou $\mathbf{K}$-espace vectoriel un triplet $(E, +, .)$ où E est un ensemble, $+$ une loi interne de E et $.$ une loi externe :

$$+ : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (u, v) & \longmapsto & u + v \end{array} \quad \text{et} \quad . : \begin{array}{ccc} \mathbf{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, u) & \longmapsto & \lambda.u \end{array}$$

Vérifiant

- $(E, +)$ *est un groupe abélien*
- *La loi . vérifie*
  - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \forall u \in E, (\lambda + \mu).u = \lambda.u + \mu.u$
  - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2, \forall u \in E, (\lambda \times \mu).u = \lambda.(\mu.u)$
  - $\forall u \in E, 1.u = u$

Remarque : Rappelons que le fait que $(E, +)$ soit un groupe abélien signifie que

—

—

—

—

Définition (Sous-espaces vectoriels)

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, on appelle sous-espace vectoriel de E une partie $F \subset E$ telle que les lois $+$ et . induisent une structure d'espace vectoriel sur F.

Remarque : Soit $F \subset E$. C'est un sous-espace vectoriel si et seulement si :

—

—

1.2 Familles de vecteurs

Dans tout ce paragraphe, E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Définition (Combinaison linéaire)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On appelle combinaison linéaire des $(u_i)_{i\in I}$ tout vecteur w de la forme

$$w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$$

où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille presque nulle de scalaires ; c'est-à-dire qu'il existe un ensemble fini $J \subset I$ tel que si $i \in I \setminus J$, $\lambda_i = 0$.

Notation : On note $\mathbf{K}^{(I)}$ l'ensemble des familles de scalaires presque nulles.
Remarque : Dans le cas où I est un ensemble fini (par exemple $I = [\![1 ; n]\!]$), la condition « presque nulle » est toujours vérifiée et on note juste

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

Notation : On note $\mathrm{Vect}((u_i)_{i\in I})$ l'ensemble des combinaisons linéaires. C'est le plus petit espace vectoriel qui contient tous les éléments de la famille. C'est l'espace vectoriel engendré par la famille.
Exercice : On considère l'espace vectoriel des suites $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. On pose $u(i)$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbf{N}, u(i)_n = \delta_{i,n} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer $\mathrm{Vect}(u(i))_{i\in\mathbf{N}}$

Exercice : Dans $\mathbf{R}^4$ on considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, 3, -2)$, $u_2 = (2, 1, 0, 0)$ et $u_3 = (1, 2, 9, -6)$. On pose $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. Déterminer la dimension de F et le décrire via un système d'équations.

Définition (Famille libre)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. Elle est libre si la famille nulle est la seule famille de scalaires presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I}$ telle que $\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = 0$.
C'est-à-dire :

$$((u_i)_{i\in I} \text{ libre }) \iff (\forall (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}, \sum_{i\in I} \lambda_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I, \lambda_i = 0)$$

Remarque : Cela revient à demander que toute sous-famille finie est libre.
Exemples :

1. Pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_k = (t \mapsto \sin(t^k))$. Montrons que la famille $(u_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ est libre.

2. Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes tels que $\forall (i,j) \in I^2, i \neq j \Rightarrow \deg(P_i) \neq \deg(P_j)$. Montrons que la famille est libre.

Exercice : On pose $f_a : x \mapsto e^{ax}$. Montrer que $(f_a)_{a\in\mathbf{R}}$ est libre.

Exercice : On considère les vecteurs $u_1 = (1, 1, 0, -1)$, $u_2 = (2, 0, 1, 1)$, $u_3 = (-1, 2, 0, 3)$ et $u_4 = (0, 1, 0, 1)$. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ?

Définition (Famille génératrice)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On dit qu'elle engendre E si $E = Vect((u_i)_{i\in I})$ c'est-à-dire que tous les vecteurs de E sont des combinaisons linéaires de vecteurs de la famille.

ATTENTION

La notion de famille libre est intrinsèque à la famille, c'est-à-dire que si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille d'un sous-espace vectoriel F, on peut travailler dans E ou dans F pour montrer que la famille est libre. Par contre, la notion de famille génératrice ne l'est pas. Une famille peut engendrer F sans engendrer E.

Exemple : La famile $(X^i)_{i\in\mathbf{N}}$ engendre $\mathbf{K}[X]$.

Définition

Une famille de vecteurs $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E si c'est une famille libre et génératrice de E.

Théorème

Soit $(u_i)_{i\in I}$ est une base de E. Pour tout vecteur w il existe une unique famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ telle que

$$w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$$

Remarque : Le fait que la famille est génératrice implique qu'il existe (au moins une) famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ telle que $w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$. Le fait qu'elle soit libre implique qu'il existe au plus une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ telle que $w = \sum_{i\in I} \lambda_i u_i$. En effet s'il y en a deux distinctes en faisant la différence on trouve une famille encore presque nulle $(\mu_i)_{i\in I}$ telle que $\sum_{i\in I} \mu_i u_i = 0$.

Définition

Soit $\mathscr{B} = (u_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour tout vecteur w, l'unique famille presque nulle $(\lambda_i) \in \mathbf{K}^{(I)}$ telle que

$$\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = w$$

s'appelle les coordonnées de w dans la base $\mathscr{B}$.

Remarque culturelle : Il a été vu en première année que tout espace vectoriel de dimension finie admettait un base.

Si on accepte l'axiome du choix, il est possible de démontrer que tout espace vectoriel admet des bases cependant dans certains cas on ne peut pas en exhiber. Par exemple $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ ou $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Ce résultat n'est pas au programme de CPGE.

Exercice : Soit $u_1 = (2, 0, 1)$, $u_2 = (-1, 1, 1)$, $u_3 = (1, 3, 5)$ et $u_4 = (1, 2, 3)$. Montrer que (u_1, u_2, u_3, u_4) engendre $\mathbf{R}^3$ et en extraire une base.

ATTENTION

Quand on travaille dans l'espace vectoriel $\mathbf{K}^n$, les vecteurs sont des n-uplets.

$$u = (x_1, \dots, x_n)$$

où $x_1, \dots, x_n$ sont les **composantes** du vecteurs.
Il y a une base dite canonique $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ où pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$,

$$e_i = (0, \dots, \underset{\underset{i}{\uparrow}}{1}, 0, \dots, 0)$$

Les **coordonnées** du vecteur u dans cette base sont $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ car

$$u = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

Mais si on considère les coordonnées de ce vecteur dans une autre base, elles ne seront plus égales aux composantes.

Définition (Rang)

Soit $\mathscr{F} = (u_i)_{i \in I}$. On appelle rang de la famille $\mathscr{F}$ et on note $\operatorname{rg}(\mathscr{F})$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par la famille quand il est de dimension finie.

Proposition

Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.

1. Si E est de dimension finie n. Alors $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) \leqslant n$.
2. Si $\mathscr{F}$ est de cardinal n. Alors $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) \leqslant n$.

ATTENTION

Ne pas mélanger les notions de rang, cardinal et dimension :

— On peut parler du rang ou du cardinal d'une famille mais pas de sa dimension.

— On peut parler de la dimension (et du cardinal) d'un sous-espace vectoriel mais pas de son rang.

Proposition

Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E

1. On a $(\text{rg}(\mathscr{F}) = \dim(E)) \iff$ (La famille $\mathscr{F}$ engendre E).
2. On a $(\text{rg}(\mathscr{F}) = \#\mathscr{F}) \iff$ (La famille $\mathscr{F}$ est libre).
3. On a $(\text{rg}(\mathscr{F}) = \#\mathscr{F} = \dim E) \iff$ (La famille $\mathscr{F}$ est une base de E).

1.3 Rang d'une application linéaire

Définition

Soit u une application linéaire. On appelle rang de u et on note $\text{rg}(u)$ la dimension de $\text{Im}(u)$ quand elle est finie. On a donc

$$\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u)).$$

Proposition

Soit u une application linéaire de E dans F et $\mathscr{F}$ une famille génératrice de E.

1. La famille image $u(\mathscr{F})$ engendre $\text{Im}(u)$.
2. On a donc $\text{rg}(u) = \text{rg}(u(\mathscr{F}))$ (dans le cas où ce sont des nombres finis).

Remarque : On utilisera ce résultat essentiellement avec $\mathscr{F}$ une base de E.

Exemple : Déterminer le rang de l'application linéaire $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Théorème

Soit u une application linéaire de E dans F et S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E.

1. La restriction de u à S est injective : $\mathrm{Ker}\left(u_{|S}\right) = \{0\}$
2. L'application u induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(u)$:

$$\begin{array}{rccc} \tilde{u}: & S & \longrightarrow & \mathrm{Im}(u) \\ & x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

Corollaire (Théorème du rang)

Soit u une application linéaire de E dans F. On suppose que E est un espace vectoriel de dimension finie.

1. Le noyau $\mathrm{Ker}(u)$ admet un supplémentaire S
2. On a

Proposition

Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels de dimension finie.

1. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim F) \iff (u$ est $)$
2. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim E) \iff (u$ est $)$
3. On a $(\mathrm{rg}(u) = \dim E = \dim F) \iff (u$ est $)$

Proposition

Soit $u : F \longrightarrow G$ et $v : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires.

1. On a $\mathrm{rg}(u \circ v) \quad\quad \mathrm{rg}(u)$ et $\mathrm{rg}(u \circ v) \quad\quad \mathrm{rg}(v)$
2. Si u est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}(u \circ v) =$
3. Si v est un isomorphisme alors $\mathrm{rg}(u \circ v) =$

Démonstration :

$\square$

2 Rappels sur les matrices

Faisons quelques rappels sur les matrices

2.1 Changements de bases

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases.

Définition (Matrice de changement de bases)

On appelle matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice des coordonnées des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$.
On la note souvent $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$. On a donc

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = Mat_{\mathscr{B}}(e'_1, \ldots, e'_n)$$

Théorème (Changement de bases pour les vecteurs)

Soit w un vecteur de E. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(w)$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(w)$ ses coordonnées dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
On a

Démonstration :

□

ATTENTION

La matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ permet de calculer simplement les coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathscr{B}$ à partir de celles du vecteur dans la base $\mathscr{B}'$.

On se donne de plus un autre espace vectoriel F avec des bases $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$.

Théorème (Changement de bases pour les applications linéaires)

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{F}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{F}'}(u)$. On a alors

$$A' =$$

où P est la matrice du changement de bases de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et Q cette de $\mathscr{F}$ à $\mathscr{F}'$.

Démonstration : On peut illustrer cette formule par le diagramme suivant.

□

Dans le cas où on regarde des endomorphismes et non plus des applications linéaires générales, on utilise quasi-systématiquement la même base pour l'espace de départ et d'arrivé (afin que la composition des endomorphismes corresponde au produit des matrices). On note alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ pour $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)$.

Corollaire (Cas des endomorphismes)

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$. On a alors

$$A' =$$

où P est la matrice du changement de bases de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

2.2 Matrices semblables

Définition (Matrices semblables)

Soit A et A' deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
On dit que A et A' sont semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que

$$A' = P^{-1}AP.$$

ATTENTION

Ne pas confondre semblables et équivalentes. Deux matrices sont équivalentes si elles ont le même rang, ce qui revient au fait qu'il existe $(P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})^2$ tel que

$$A' = PAQ$$

Exemple : Donner deux matrices équivalentes qui ne sont pas semblables.

Proposition

La relation « est semblable » est une relation d'équivalence.

Démonstration : Il suffit de démontrer qu'elle est réflexive, symétrique et transitive. □

Remarque : Soit A une matrice, l'ensemble des matrices semblables à A forment ce que l'on appelle sa classe de similitude.

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}$ une base de E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. Soit $A' \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, elle est semblable à A si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B}'$ de E telle que $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$.

Démonstration :

Note

Cela signifie que si u est un endomorphisme de E et si A est **une** matrice de u dans **une** base $\mathscr{B}$ de E, la classe de similitude de A est l'ensemble des matrices A' telles qu'il existe une base $\mathscr{B}'$ vérifiant

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = A'$$

La suite du cours consiste à expliquer comment choisir la matrice « la plus simple ».

2.3 Trace

Définition (Trace)

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on appelle trace de A et on note $\operatorname{tr}(A)$ la somme des coefficients diagonaux.

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Proposition (Propriétés de la trace)

1. La trace est une forme linéaire.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$
3. Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$

Démonstration :

1. Evident
2. Evident
3.

$\square$

Exercice : Calculer pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $\operatorname{tr}(A^T A)$.

ATTENTION

La trace d'un produit n'est pas (en général) le produit des traces.

Corollaire

Soit A et B deux matrices semblables, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$.

Démonstration : Par définition si A et B sont semblables, il existe $P \in \mathsf{GL}_n(\mathbf{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. On en tire que

$$\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(APP^{-1}) = \mathrm{tr}(A).$$

□

Exercices :

1. Trouver deux matrices A et B ayant la même trace mais n'étant pas semblables.
2. Deux matrices équivalentes ont-elles la même trace ?

Proposition - définition

Soit u un endomorphisme de E (espace vectoriel de dimension finie). Pour toute base $\mathscr{B}$ la trace de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est la même. On l'appelle la trace de u et on la note $\mathrm{tr}(u)$.

3 Formes linéaires et hyperplans

On note $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$ l'ensemble des formes linéaires que l'on appelle aussi l'espace dual.

3.1 Changement de bases

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, on a coutume de calculer les matrices d'une forme linéaire f en prenant la base canonique (c'est-à-dire $1_{\mathbf{K}}$) pour l'espace d'arrivé qui est $\mathbf{K}$. On note alors $\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ pour $\mathsf{Mat}_{\mathscr{B},\mathsf{can}}(f)$.

ATTENTION

Ne pas confondre avec l'abus de notations $\mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathsf{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)$ dans le cas des endomorphismes.

Soit x un vecteur de E et $X = \mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, si on note $L = \mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ alors $LX = \mathsf{Mat}_{\mathsf{can}}(f(x))$, on obtient donc $f(x)$ en identifiant $\mathscr{M}_1(\mathbf{K})$ avec $\mathbf{K}$.

Exemple : Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbf{C}_3[X] & \to & \mathbf{C} \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 P(t)dt \end{array}$$

On prend pour $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{C}_3[X]$. On note $L = \mathsf{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $P = 1 + X - X^3$

Calculer $f(P)$ directement et à l'aide de la matrice L.

Proposition

Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $f \in \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$. On note P la matrice de changement de bases de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, si on note $L = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $L' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ alors

ATTENTION

Cette forme est à l'envers par rapport au changement de bases des vecteurs. On a

Démonstration : Il suffit d'utiliser la formule du changement de bases en prenant garde au fait que l'on ne change pas la base à l'arrivée.

□

3.2 Bases duales et formes coordonnées

Définition (Formes coordonnées)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie (notée n). Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On sait que tout vecteur u de E se décompose de manière unique :

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

Pour $i \in [\![1 ; n]\!]$, on appelle alors i-ème forme coordonnée et on note e_i^* l'application qui associe au vecteur v le scalaire x_i.

ATTENTION

Même si la notation ne fait apparaitre que le vecteur e_i, la forme e_i^* dépend de toute la base.
Par exemple pour $E = \mathbf{R}^2$, si on pose $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$ et $e_2' = (1,1)$.
Si on considère la base (e_1, e_2) et $u = (7,3)$ on a $u = 7e_1 + 3e_2$ et donc $e_1^*(u) = 7$.
Par contre, si on considère la base (e_1, e_2') et toujours $u = (7,3)$, on a $u = 4e_1 + 3e_2'$ et donc $e_1^*(u) = 4$.

Remarque : Soit $(i,j) \in [\![1 \,;\, n]\!]$,

$$e_i^*(e_j) = \delta_{ij}.$$

Proposition

Avec les notations précédentes,

1. Les formes coordonnées sont des formes linéaires.
2. La famille $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*.

Démonstration :

1. Soit $u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $v = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. Si on pose λ et μ dans $\mathbf{K}$ et

   $$w = \lambda u + \mu v = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + \mu y_i) e_i.$$

   On en déduit que

   $$e_i^*(w) = \lambda x_i + \mu y_i = \lambda e_i^*(u) + \mu e_i^*(v).$$

   Les formes coordonnées sont bien linéaires.
2.

□

Exemple : Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$ et $(1, X, \dots, X^n)$ la base canonique. On sait, d'après la formule de Taylor que pour tout polynôme P,

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k.$$

Cela signifie que si on note $e_i = X^i$ alors

$$e_i^* : P \mapsto \frac{P^{(i)}(0)}{i!}.$$

3.3 Formes linéaires et hyperplans

Définition

Un hyperplan de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

Proposition

Si E est de dimension finie avec $\dim E = n$. Les hyperplans sont les espaces vectoriels de dimension $n - 1$.

Démonstration :

- Si H est un hyperplan et f une forme linéaire non nulle telle que $H = \ker f$. Comme f n'est pas nulle $\mathrm{rg}(f) = 1$. En utilisant le théorème du rang on obtient $\dim H = n - 1$.
- Soit H un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$. On considère une base $(u_1, \dots, u_{n-1})$ de H. On peut la compléter en une base $(u_1, \dots, u_{n-1}, u_n)$ de E. Il suffit de prendre $f = u_n^*$ la forme coordonnée.

□

Proposition

Soit H un hyperplan et D une droite qui n'est pas contenue dans H. On a $H \oplus D = E$.

Démonstration :

□

Proposition

Soit f et g deux formes linéaires.

$$\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g \iff \exists \lambda \in \mathbf{K}, f = \lambda g.$$

Démonstration :

- $\boxed{\Leftarrow}$ Evident.
- $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $D = \mathrm{Vect}(u)$ un supplémentaire de H. On a $f(u)$ et $g(u)$ qui sont non nuls donc il existe λ tel que $f(u) = \lambda g(u)$. Maintenant tout vecteur w s'écrit $w_1 + \alpha u$ où $w_1 \in H$. Il suffit alors de faire le calcul.

$\square$

Remarque : Cela revient à dire que deux équations d'un même hyperplan sont les mêmes à une constante multiplicative près.